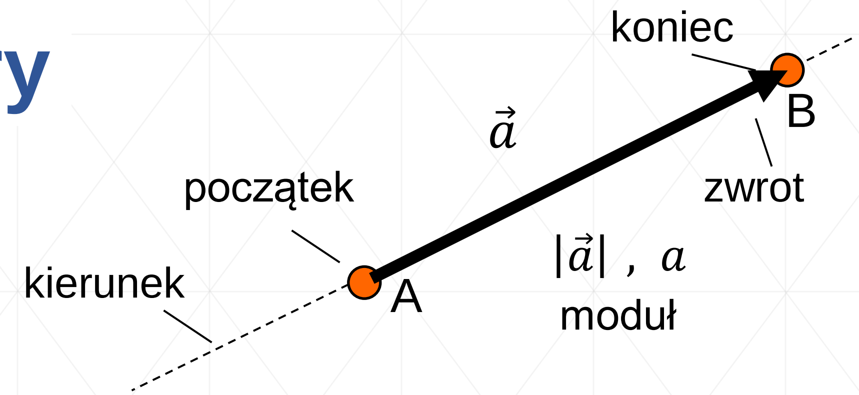
Proszę o uwagę

2. Wektory i skalary w fizyce

- operacje na wektorach:
    - dodawanie,
    - mnożenie;
- przykłady operacji wektorowych;
- układy odniesienia;
- definicja i znaczenie pochodnej funkcji w fizyce;

Wektory i skalary



Wielkości fizyczne dzielimy na:

- wielkości bezkierunkowe, zwane skalarami,

- wielkości kierunkowe (wektorowe), zwane w skrócie wektorami.

Skalar - wielkość fizyczna całkowicie określona przez podanie jedynie jej wartości (wymiaru, jednostek) [temperatura - K, °C; długość - m, cm; masa - g, kg]

Wektor - wielkość zorientowana w przestrzeni wymagająca dla jej określenia podania zarówno wartości (wymiaru) oraz kierunku i zwrotu (siła, przemieszczenie, prędkość,…)

Podczas opisywania wielkości wektorowych musimy podać ich bezwzględną wartość liczbową, zwaną też modułem, kierunek, zwrot i punkt przyłożenia. Innymi słowy, wielkość wektorową można przedstawić geometrycznie jako odcinek skierowany, tj. odcinek leżący na określonej prostej, mający określony początek i koniec (a więc określony zwrot), jak również określoną długość wyrażającą w pewnej skali bezwzględną wartość danego wektora (moduł).

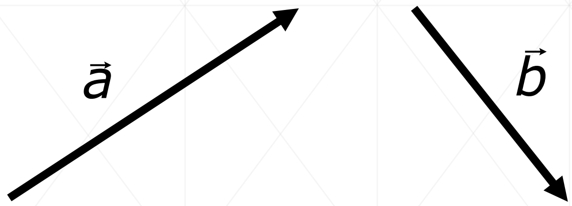
Wielkość wektorową oznaczamy symbolem strzałki $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$

lub piszemy pogrubioną czcionką ***a***, ***AB***

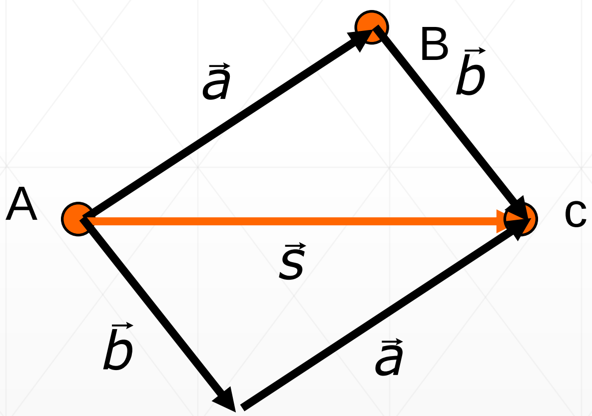
Działanie na wektorach

- geometryczne dodawanie wektorów $\vec{a} + \vec{b}$
- składowe wektorów
- wektory jednostkowe
- dodawanie wektorów na składowych
- mnożenie wektorów:
  - iloczyn skalarny
  - iloczyn wektorowy

Geometryczne dodawanie wektorów

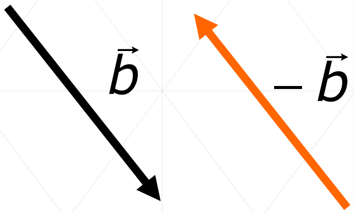


Szukamy sumy tych wektorów

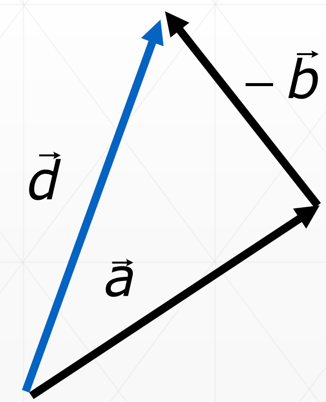


łączne przemieszczenie jest sumą wektorową przemieszczeń składowych

Odejmowanie wektorów to dodawanie wektora przeciwnego



$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



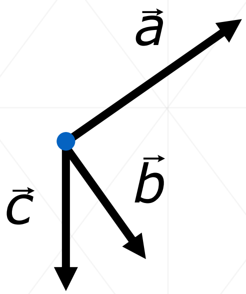
Prawa dodawania:

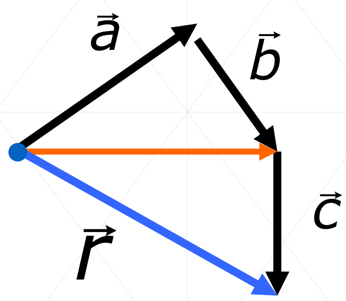
przemienność $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

łączność $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

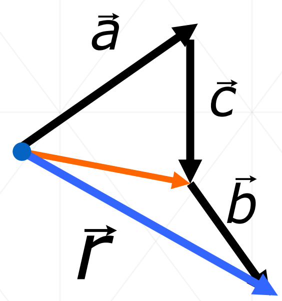
Przykład: Korzystając z prawa przemienności i łączności dodawania wektorów wyznacz wektor $\vec{r}$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

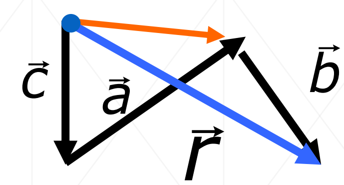




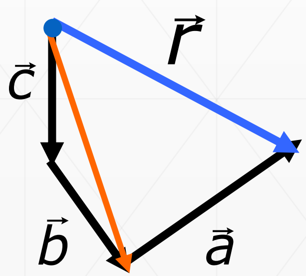
$$\vec{r} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$$



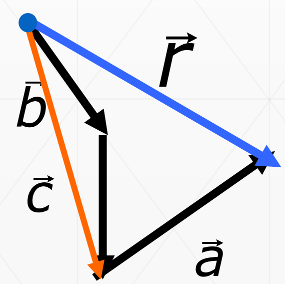
$$\vec{r} = \left(\vec{a} + \vec{c}\right) + \vec{b}$$



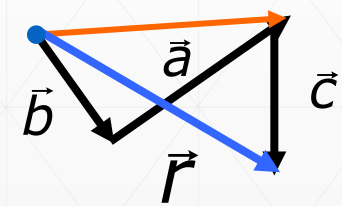
$$\vec{r} = \left(\vec{c} + \vec{a}\right) + \vec{b}$$



$$\vec{r} = \left(\vec{c} + \vec{b}\right) + \vec{a}$$



$$\vec{r} = \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{a}$$



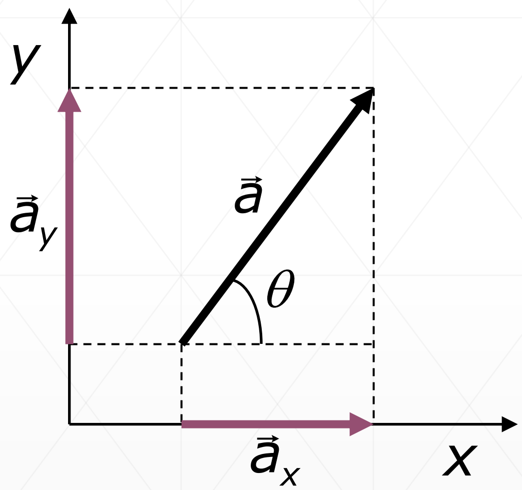
$$\vec{r} = \left(\vec{b} + \vec{a}\right) + \vec{c}$$

Składowe wektorów

składowe wektory

$\vec{a}_x \qquad \vec{a}_y$

Składową wektora nazywamy jego rzut na wybraną oś np. x, y prostokątnego układu współrzędnych



$$a_x = a\cos\theta$$

$$a_y = a\sin\theta$$

Dany wektor $\vec{a}$ jest jednoznacznie określony przez:

- wielkości a i θ, lub
- składowe a_x i a_y

Wielkości te są powiązane zależnościami:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

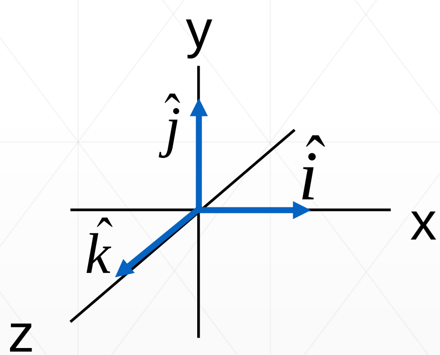
$$tg\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Z reguły działania matematyczne prowadzimy na składowych wektora

Wektory jednostkowe

Wektorem jednostkowym nazywamy wektor o długości równej 1, skierowany w określonym kierunku.

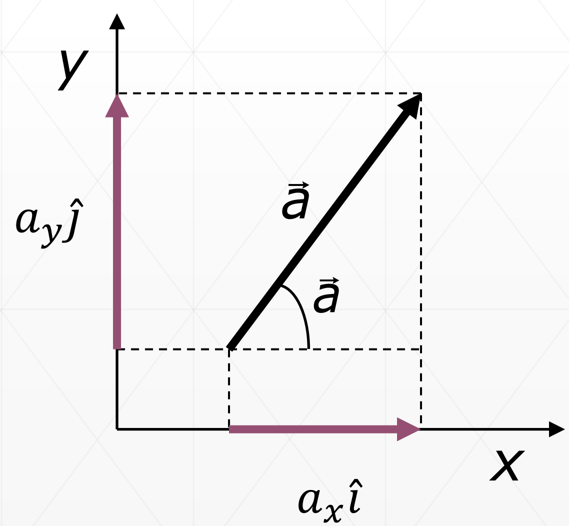
W przypadku prawoskrętnego układu współrzędnych wektory jednostkowe dodatnich kierunków osi x, y i z oznaczmy $\hat{i},\ \hat{j}, \hat{k}$



$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$



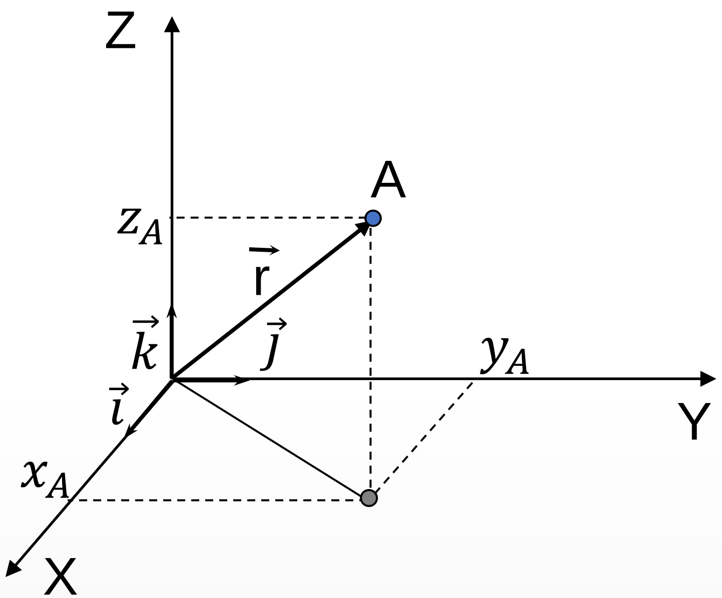
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y)$$

Układy współrzędnych



wektory jednostkowe

$$\vec{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

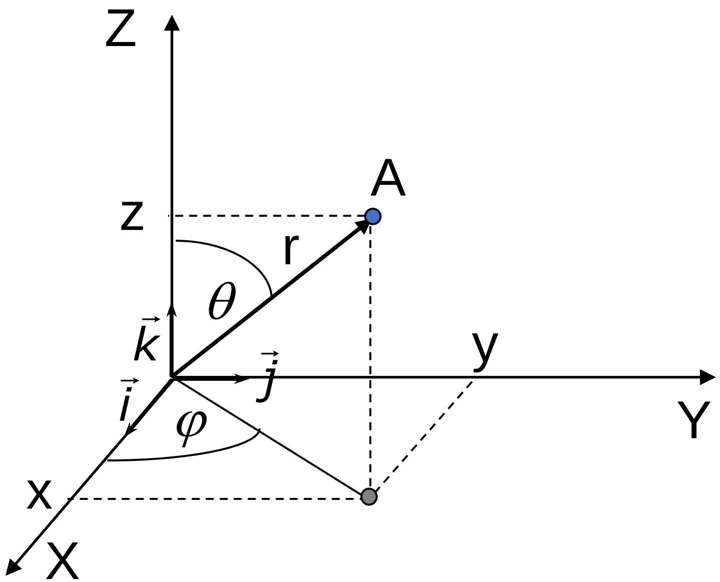
- układ odniesienia - kartezjański układ współrzędnych prostokątnych
- układ prawoskrętny
- położenie cząstki – podanie współrzędnych cząstki (wektor położenia)

$$\vec{r} = (x, y, z) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r}_A = (2, 3, 2.5)$$

$$x_A = 2, \quad y_A = 3, \qquad z_A = 2.5$$

Układ sferyczny



- w układzie sferycznym położenie cząstki określamy przez podanie:
  - odległości od środka układu **r**
  - kąta azymutalnego **φ** w płaszczyźnie XY
  - kąta biegunowego **θ** jaki tworzy wektor r dodatnią półosią OZ

$$\vec{r} = (r, \varphi, \theta) \qquad \vec{r}_A = (3, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

związek pomiędzy współrzędnymi układu kartezjańskiego i sferycznego

$$x = r \sin\theta \cos\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$x = 3 \sin 45° \cos 45° = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}5$$

$$y = 3 \sin 45° \sin 45° = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}5$$

$$z = 3 \cos 45° = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}12$$

$$\vec{r} = (1.5, 1.5, 2.12)$$

Dodawanie wektorów na składowych

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} &= (b_x, b_y, b_z) \end{aligned}\right\} \qquad \vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$$

skoro wektor $\vec{r}$ jest taki sam jak wektor $(\vec{a} + \vec{b})$ to

i ich składowe muszą być jednakowe

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

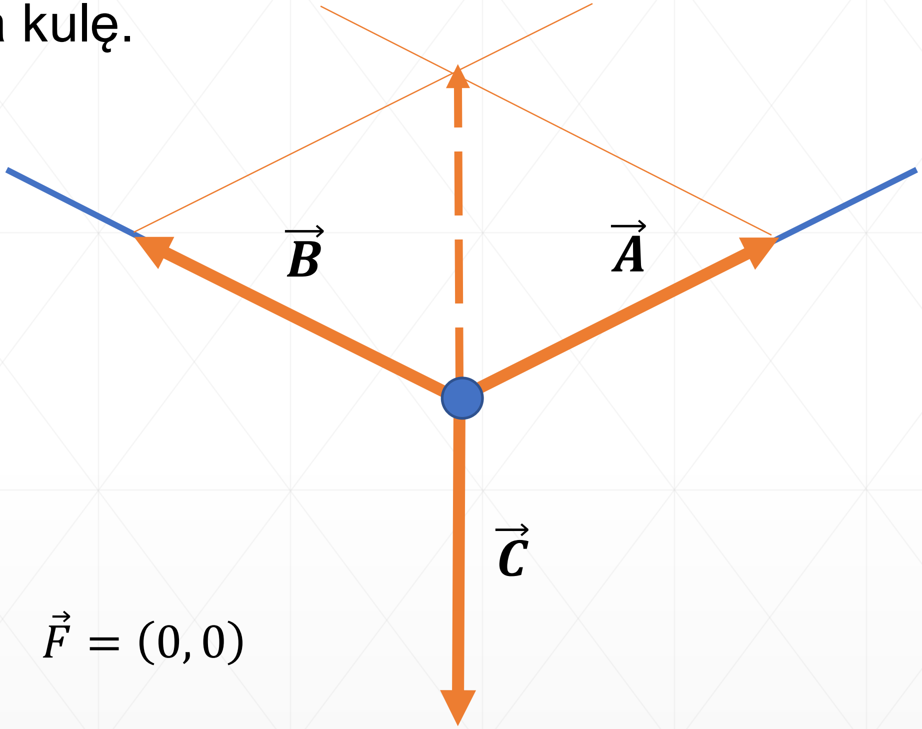
$$r_z = a_z + b_z$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= (2,-1,3) \\ \vec{b} &= (1,2,-3) \end{aligned}\right\} \qquad \vec{r} = (3,1,0)$$

Przykład - dodawanie sił

Na dwóch linach zawieszona jest kula na którą działają trzy siły $\left(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\right)$
Oblicz siłę wypadkową działającą na kulę.

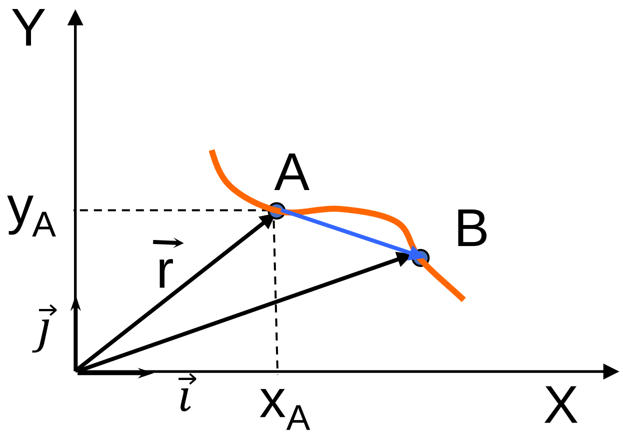
$$\left.\begin{aligned} \vec{A} &= (2,1) \\ \vec{B} &= (-2,1) \\ \vec{C} &= (0,-2) \end{aligned}\right\} \qquad \vec{F} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$



$$\left.\begin{aligned} F_x &= a_x + b_x + c_x = 2 - 2 + 0 = 0 \\ F_y &= a_y + b_y + c_y = 1 + 1 - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \vec{F} = (0,0)$$

Zarówno dodawanie geometryczne jak i dodawanie składowych wektorów daje ten sam wynik. Siła wypadkowa jest równa zero – kula wisi w spoczynku.

Wektor położenia



- położenie cząstki – podanie współrzędnych cząstki (**wektor położenia**)

$$\vec{r} = (x, y) = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath}$$

$$\vec{r}_A = (3, 2.5) \quad \vec{r}_B = (4, 2)$$

- **przemieszczenie** (różnica wektorów)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (4 - 3,\ 2 - 2.5) = (1, -0.5)$$

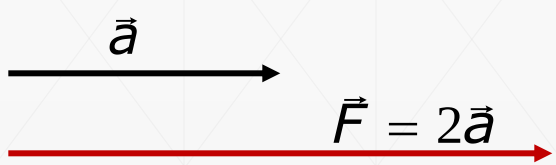
Mnożenie wektora przez liczbę

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a} \qquad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \qquad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

$$\vec{b} = k \cdot (a_x, a_y, a_z) = (ka_x, ka_y, ka_z)$$

Iloczyn wektora $\vec{a}$ przez liczbę k daje nowy wektor o wartości liczbowej k razy powiększonej i o zwrocie zgodnym lub przeciwnym względem wektora $\vec{a}$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad m = 2\,kg$$

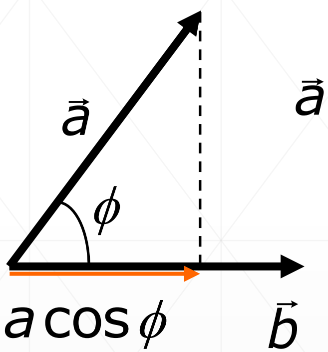


$$\vec{F} = b \cdot \vec{v} \qquad b = -\frac{1}{2}\,kg/s$$

Mnożenie wektorów

- iloczyn skalarny

jest wielkością skalarną równą iloczynowi modułu jednego wektora i składowej drugiego wektora w kierunku pierwszego z nich



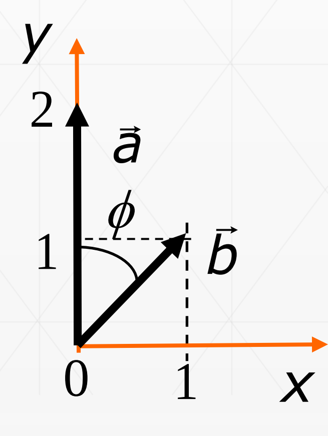
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi$$

Jeśli znamy współrzędne wektorów to iloczyn skalarny równy jest sumie iloczynów odpowiednich składowych

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Obliczyć kąt pomiędzy wektorami: $\vec{a} = (0,2)$ $\vec{b} = (1,1)$

$$\cos\phi = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{a\cdot b} = \frac{0\cdot 1 + 2\cdot 1}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \phi = \frac{\pi}{4}$$

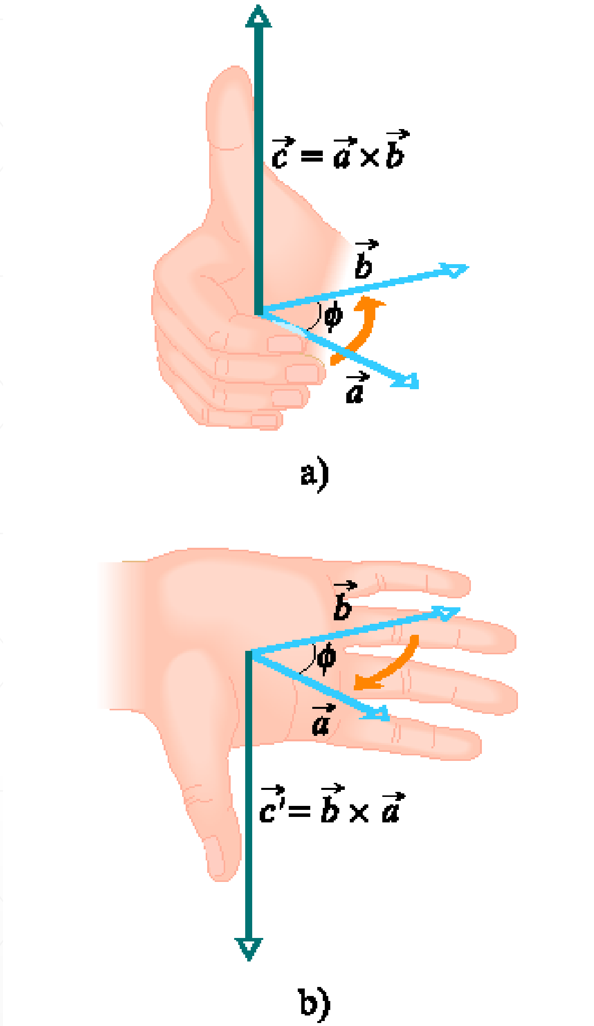


Mnożenie wektorów

- iloczyn wektorowy

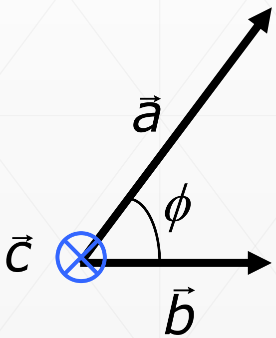
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

jest to wektor $\vec{c}$ prostopadły do płaszczyzny w której leżą $\vec{a}$ i $\vec{b}$, o zwrocie wyznaczony przez regułę prawej dłoni i długości równej $c = ab\sin\varphi$



W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

$\odot$ skierowany do nas



wektor $\vec{c}$ prostopadły do ekranu i skierowany w głąb

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

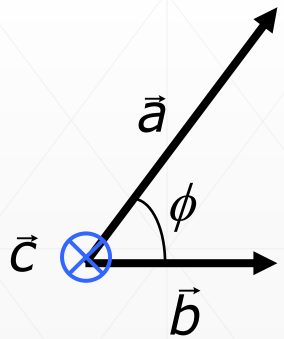
Wyznaczanie iloczynu wektorowego

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\vec{i} + \\ + (a_z b_x - b_z a_x)\vec{j} + \\ + (a_x b_y - b_x a_y)\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c_x = (a_y b_z - b_y a_z)$$
$$c_y = (a_z b_x - b_z a_x)$$
$$c_z = (a_x b_y - b_x a_y)$$



$$\vec{a} = (1, 2, 0)$$
$$\vec{b} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 \cdot 0 - 0 \cdot 0)\vec{i} + \\ + (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1)\vec{j} + \\ + (1 \cdot 0 - 1 \cdot 2)\vec{k}$$

wektor $\vec{c}$ prostopadły do ekranu
i skierowany w głąb powierzchni

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, -2)$$

Przykłady iloczynów wektorów w fizyce

- praca siły *F* $$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}$$
- strumień pola *E* $$\boxed{\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S}}$$
- moment siły *F* $$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$
- prędkość w ruchu obrotowym o częstości ω $$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Pochodna funkcji

- Załóżmy, że mamy daną funkcję y = f(x) oraz argument x w otoczeniu którego funkcja jest określona
- Pochodna funkcji określa nieskończenie małą zmianę funkcji w odniesieniu do jej zmiennej:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

przy zmniejszaniu się Δx iloraz dąży do granicy, którą nazywamy pochodną

- Pochodna jest miarą szybkości (tempa) zmiany funkcji względem zmian jej argumentów
- Geometrycznie pochodna wyznacza styczną do funkcji w danym punkcie
- Funkcje i zmienne (argumenty) mogą oznaczać różne wielkości i mogą być opisywane różnymi symbolami

np. gdy y = *f(x)* to pochodną oznaczamy $\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \equiv y'$

natomiast gdy x = *f(t)* to pochodną oznaczamy: $\frac{dx}{dt} = \frac{df(t)}{dt} \equiv \dot{x}$

Pochodna - graficznie

Funkcja f(t) - $x = 2t^2$ pochodna $x' = 4t$ $[x'(1) = 4]$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{30}{3} = 10$$

$$\Delta t = 0{,}1\ s$$

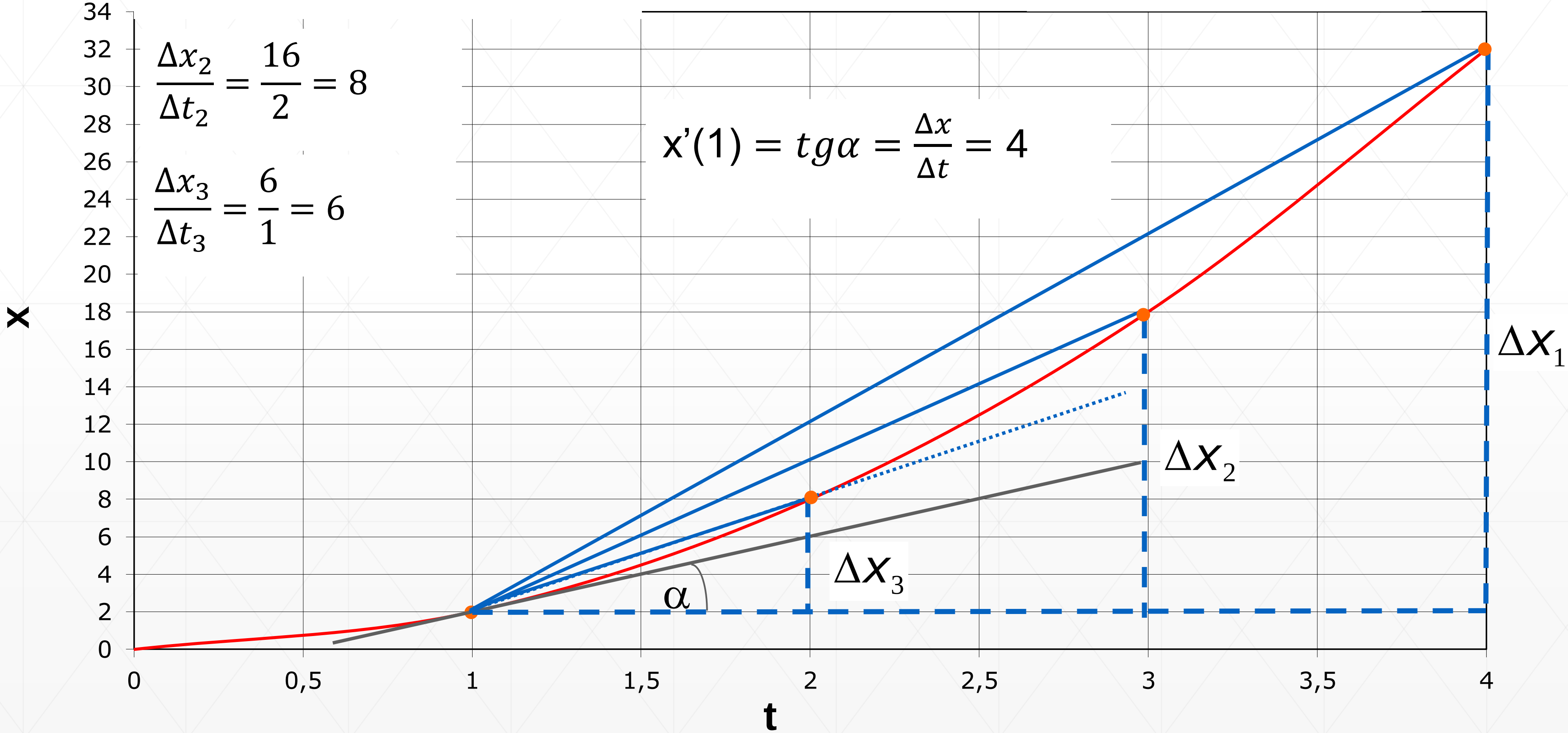
$$\Delta x = 2 \cdot 1{,}1^2 - 2 = 0{,}41$$

$$\frac{\Delta x_n}{\Delta t_n} = \frac{0{,}41}{0{,}1} = 4{,}1$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3} = \frac{6}{1} = 6$$

$$x'(1) = tg\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 4$$



Równanie stycznej w punkcie t = 1 jest postaci $x = 4t - 2$

Pochodna funkcji

Funkcja $f(x)$	Pochodna $f'(x)$
stała	0
x^n	nx^{n-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^{ax}	ae^{ax}
$\ln(x)$	$1/x$

Właściwości pochodnej:

$(ax)' = ax'$

$(x+y)' = x' + y'$

$(x \cdot y)' = x' \cdot y + x \cdot y'$

$(x/y)' = (x' \cdot y - x \cdot y')/y^2$

Pochodna funkcji złożonej

$$\frac{dy(x(t))}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Pochodna cząstkowa

Jeżeli badana funkcja zależy od kilku (np. dwóch) zmiennych f(x,y) to możemy określić szybkość zmiany tej funkcji względem zmiany każdego z argumentów (x, y) i nazywamy ją pochodną cząstkową

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{df}{dx}(y = const)$$

pochodna względem zmiennej x przy ustaleniu y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{df}{dy}(x = const)$$

pochodna względem zmiennej y przy ustaleniu x

$$f(x,y) = 3x + y^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{d(3x + y^2)}{dx} = \frac{d(3x)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = 3 + 0 = 3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{d(3x + y^2)}{dy} = 2y$$

Podsumowanie

1. Przypomnieliśmy operacje prowadzone na wektorach.
2. Wiemy jak opisać położenie cząstki za pomocą wektorów.
3. Potrafimy przekształcić równanie wektorowe na równoważny układ równań odpowiednich współrzędnych wektorów.
4. Znamy sens fizyczny pochodnej funkcji.
5. Wiemy jaka jest geometryczna interpretacja pochodnej.

Dziękuję za uwagę