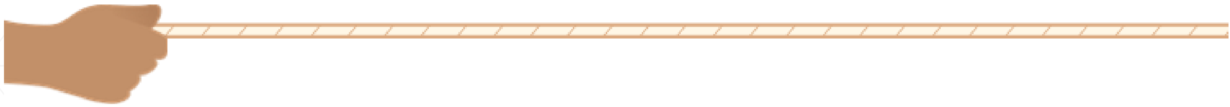
Proszę o uwagę

22. Ruch falowy

- fale biegnące,
- równanie fali,
- przenoszenie energii przez fale,
- fale stojące,
- paczka falowa,
- prędkość grupowa a prędkość fazowa,
- dyspersja,
- fale akustyczne.

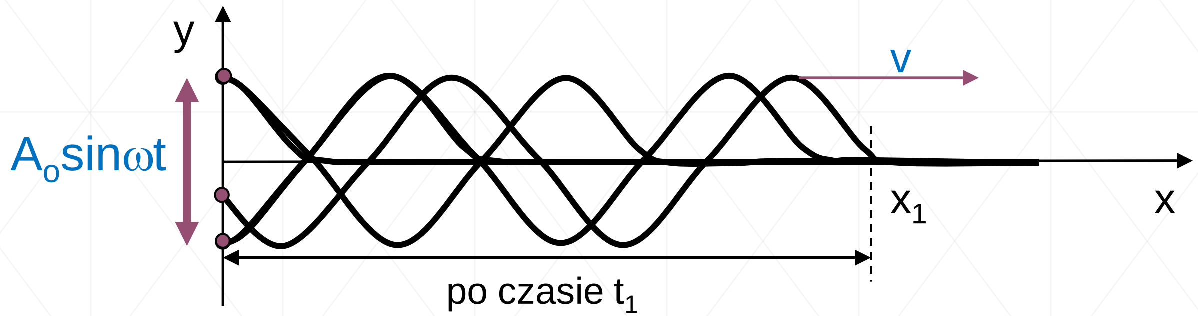
Podstawowe definicje



- **fala** – zaburzenie rozchodzące się w ośrodku lub w przestrzeni któremu towarzyszy przenoszenie energii:
  - falą może być pojedynczy impuls o dowolnym kształcie
  - lub powtarzający się impuls co pewien czas, czyli rozchodzące się drganie
- **rodzaje fal**:
  - fale sprężyste (mechaniczne) rozchodzące się w ośrodkach sprężystych
  - fale elektromagnetyczne rozchodzące się w ośrodkach lub próżni
  - fale materii
- **fale harmoniczne** – jeżeli zaburzenie jest drganiem harmonicznym
- **fala biegnąca** – to fala, w której punkty o jednakowej fazie (np. grzbiety) poruszają się
- **fala stojąca** – to fala, w której grzbiety i doliny nie przemieszczają się, czyli są to drgania ośrodka zwane drganiami normalnymi

Równanie fali

Rozpatrzmy napiętą linę której jeden koniec drga ruchem harmonicznym, a zaburzenie rozchodzące się z prędkością v wzdłuż osi x



w punkcie początkowym x = 0

$$y(0,t) = A_o \sin(\omega t)$$

w punkcie x_1 zaburzenie pojawi się po $t_1 = \frac{x_1}{v}$

$$y(x_1,t) = A_o \sin\omega\,(t - t_1)$$

w dowolnym punkcie x

$$y(x,t) = A_o \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A_o \sin(\omega t - kx)$$

$gdzie \quad k = \omega/v$ nazywamy liczbą falową

$$y(x,t) = A_o \sin(\omega t - kx + \phi)$$

– równanie fali z fazą początkową ϕ

Wielkości charakteryzujące fale

częstość kołowa

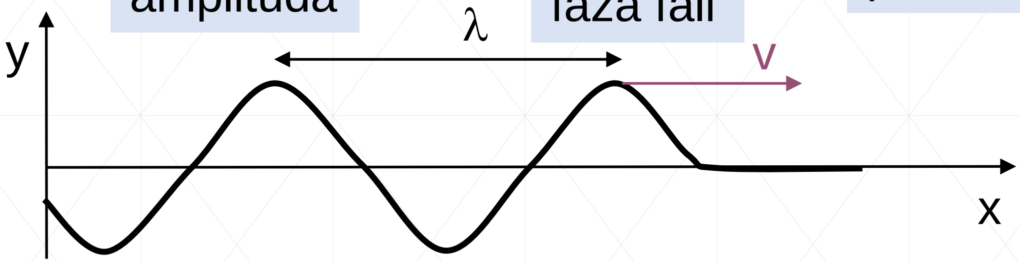
liczba falowa

przemieszczenie

$$y(x,t) = A_o \sin(\underbrace{\omega t - kx}_{\text{faza fali}})$$

amplituda

położenie



ponieważ $k = \omega / v$ *to* $k = 2\pi / v \cdot T$ *ale* $\lambda = v \cdot T$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ liczba falowa

wielkość λ jest o okresem przestrzennym zwanym długością fali

propagacja w
kierunku +x
kierunku -x

$$y(x,t) = A_o \sin(\omega t - kx)$$

$$y(x,t) = A_o \sin(\omega t + kx)$$

$$\omega t - kx = const$$ stałość fazy

$$\omega - k \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \qquad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

stąd k nazywa się też wektorem falowym

prędkość fazowa – prędkość przemieszczania się fazy

Równanie różniczkowe fali płaskiej

$$y(x,t) = A_o \sin(\omega t - kx)$$

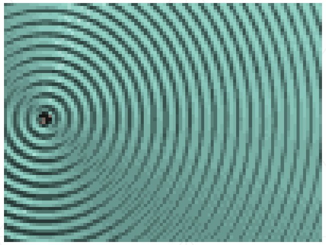
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -A_o \omega^2 \sin(\omega t - kx) \qquad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -A_o k^2 \sin(\omega t - kx)$$

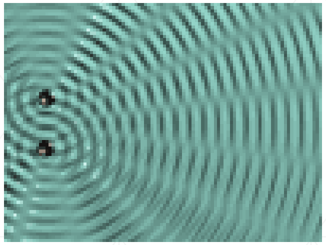
$$poniewa\dot{z} \quad k = \omega / v \qquad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -A_o \frac{\omega^2}{v^2} \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

różniczkowa postać równania fali płaskiej

Właściwości fal





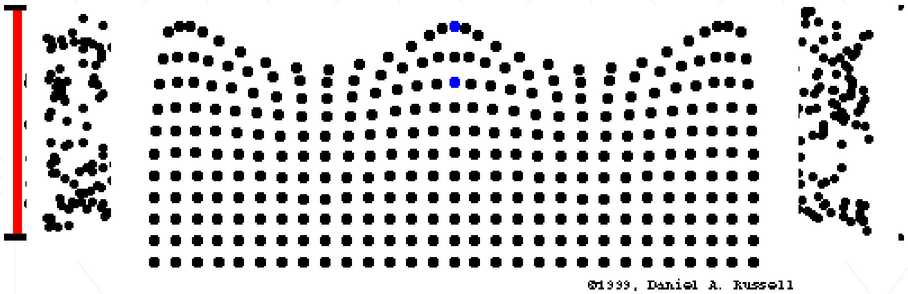
- fale harmoniczne opisane są funkcją sinus lub cosinus
- dowolny ruch falowy można przedstawić jako superpozycję fal harmonicznych – analiza Fouriera
- powierzchnia falowa (czoło fali) – zbiór punktów o takiej samej fazie jest jednakowo odległa od źródła fali
- linie prostopadłe do powierzchni falowej to promień fali, wskazują kierunek propagacji
- fale harmoniczną można przedstawić również w zapisie zespolonym:

$$\Psi(x,t) = A_o e^{i(\omega t - kx)} = A_o e^{i\omega t} e^{-ikx}$$

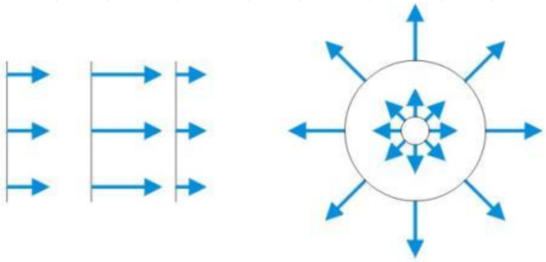
sens fizyczny ma tylko część rzeczywista zespolonej funkcji falowej

Zasada superpozycji: jeśli w ośrodku propagują się dwie fale, to wypadkowe zaburzenie ośrodka jest równe sumie zaburzeń wywołanych przez poszczególne fale

Rodzaje fal



- w zależności od kształtu czoła fali:
  - płaskie
  - walcowe (koliste)
  - kuliste

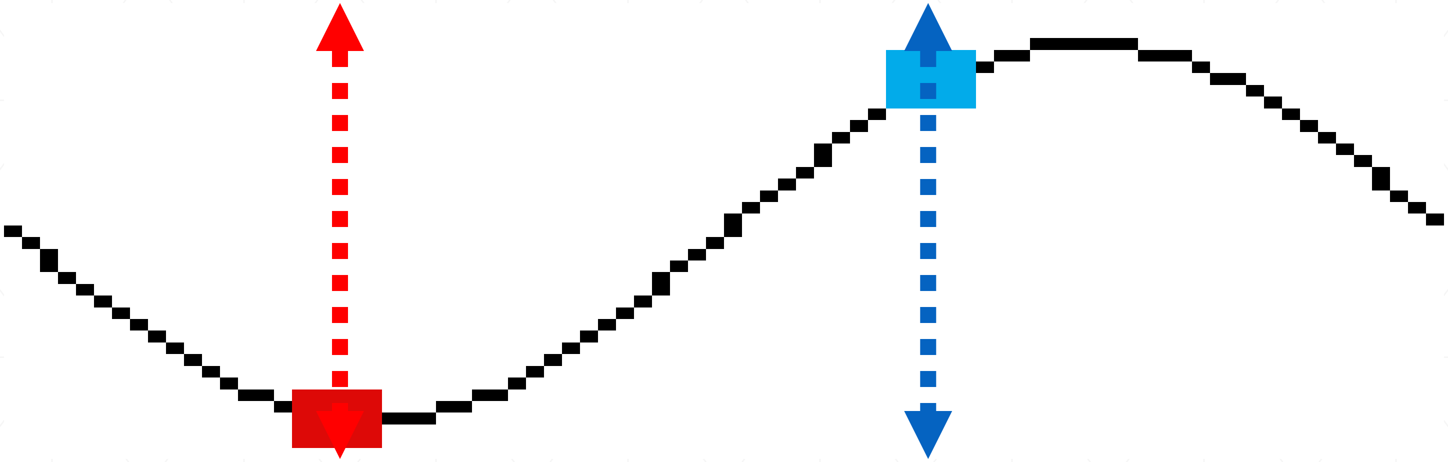


Fala płaska

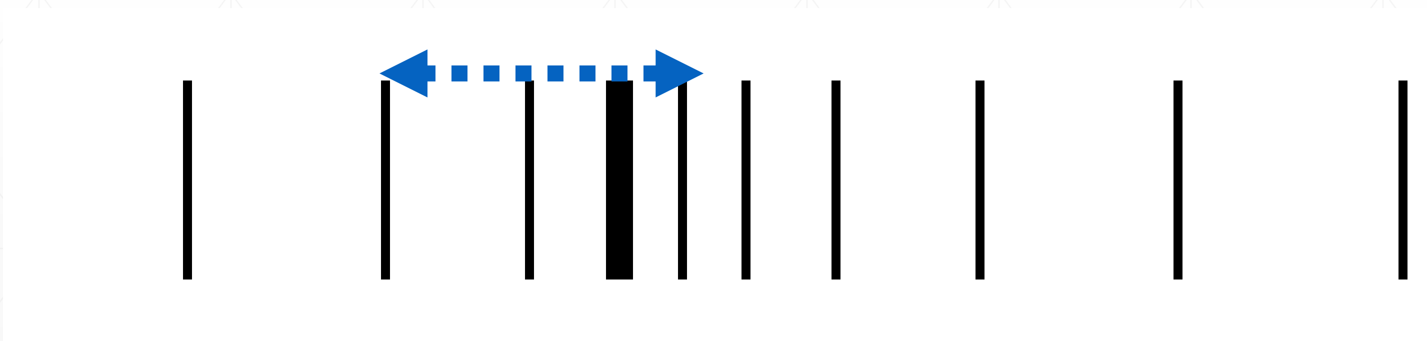
Fala kulista

- w zależności od zmiennej wielkości fizycznej:
  - skalarne (np. fale ciśnienia)
  - wektorowe (np. elektromagnetyczne)
    - podłużne
    - poprzeczne, tylko w ośrodkach sprężystych
    - powierzchniowe

mogą być spolaryzowane



Fala poprzeczna

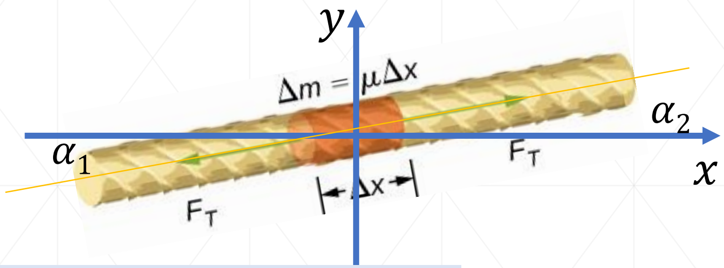


Fala podłużna

Przykład – fala w naprężonej linie

Lina o gęstości liniowej μ napięta naprężeniem F_T wykonuje drgania poprzeczne.
Siła wypadkowa działająca na element struny w kierunku pionowym jest równa:

$$\mu = \frac{masa\ liny}{długość}$$



$$F_{wyp} = F_T \sin\alpha_1 - F_T \sin\alpha_2 = \Delta m\, a = \mu\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Dla małych kątów:

$$\sin\alpha = \alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$F_T\,\alpha_1 - F_T\alpha_2 = F_T\Delta\,\alpha = \mu\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

porównując z równaniem falowym $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ otrzymujemy: $v = \sqrt{F_T/\mu}$

Prędkość fazowa zależy od parametru sprężystości ośrodka F_T (naprężenia liny)
oraz parametru bezwładności μ (gęstości liniowej)

Energia przenoszona przez fale

Uśredniona w czasie moc sinusoidalnej fali mechanicznej, przez którą należy rozumieć średnią szybkość przenoszenia energii przez falę wynosi:

$$\langle P \rangle = \frac{F_T \omega^2}{2v} A_o^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A_o^2 v$$

uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej jest wprost proporcjonalna do **kwadratu amplitudy** fali i do **kwadratu częstości kołowej** fali.

Przykłady przenoszenia energii przez fale:

- trzęsienia ziemi niszczą całe miasta,
- hałas uszkadza komórki nerwowe w uchu,
- fale wodne podmywają brzeg morza,
- ultradźwięki leczą nadwerężone mięśnie,
- wiązka laserowa niweluje komórki nowotworowe.

Fale stojące

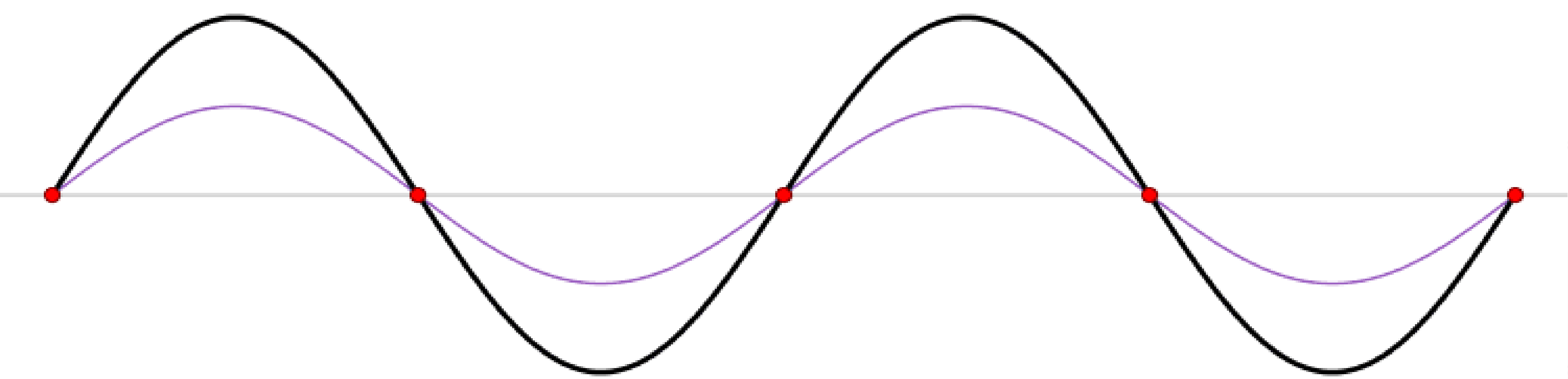
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2A\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Fala stojąca powstaje przy nakładaniu się dwu harmonicznych fal biegnących propagujących się w przeciwnych kierunkach z jednakowymi prędkościami i amplitudami

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos k\,x\cdot\cos\omega\,t$$



strzałka $-\ kx = \pm n\pi \quad (n = 0,1,2\ldots) \Rightarrow x = \pm n\frac{\lambda}{2} \rightarrow A_{st} = 2A$

węzeł $-\ kx = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0,1,2\ldots) \Rightarrow x = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \rightarrow\ A_{st} = 0$

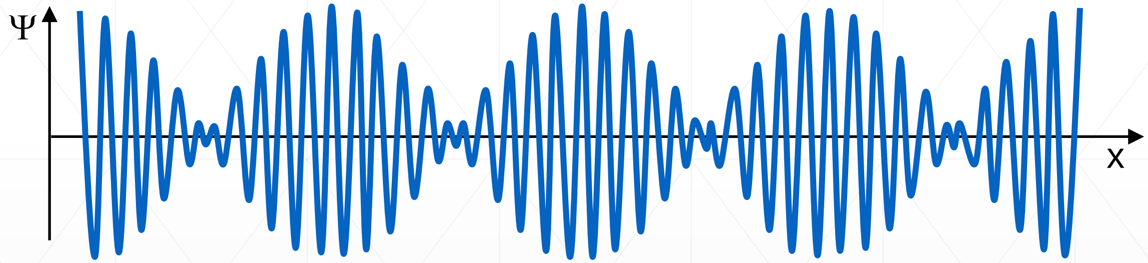
DF-7

Superpozycja fal harmonicznych - prędkość grupowa

Rozważmy dwie fale harmoniczne o nieco różnych częstościach $d\omega << \omega$

$$y_1 = A_o \sin\big((\omega + d\omega)t - (k + dk)x\big) \qquad y_2 = A_o \sin\big((\omega - d\omega)t - (k - dk)x\big)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A_o \cos(d\omega \cdot t - dk \cdot x) \cdot \sin(\omega t - kx)$$



w wyniku superpozycji dwóch fal otrzymaliśmy fale harmoniczną o częstości nośnej ω i modulowanej amplitudzie przenoszonej z prędkością grupową v_g

$$d\omega \cdot t - dk \cdot x = const$$

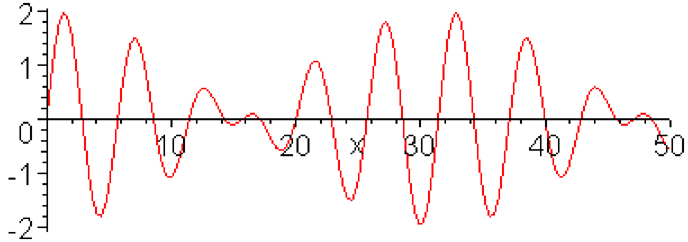
$$d\omega \cdot dt - dk \cdot dx = 0$$

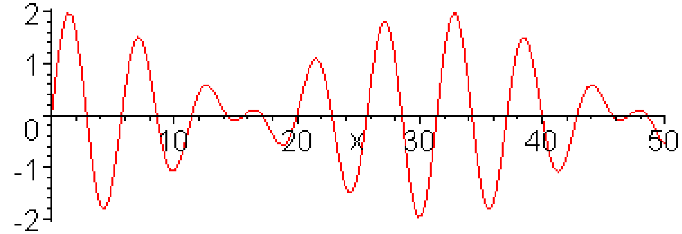
$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

- prędkość grupowa

Dyspersja fal

szukamy związku pomiędzy prędkością grupową a fazową





$$v = \frac{\omega}{k} \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dkv}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} \qquad dk = d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$$

$$v_g = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

prędkością grupową różni się od fazowej, gdy prędkość fazowa zależy od częstości (długości fali). Zależność v od λ nazywamy dyspersją.

ośrodki dyspersyjne – ($v \neq v_g$) fale o różnej długości rozchodzą się z różną prędkością, np. pryzmat dla światła

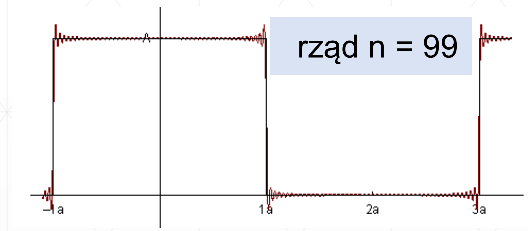
ośrodki niedyspersyjne – ($v = v_g$) fale o różnej długości rozchodzą się z taką samą prędkością, np. w próżni

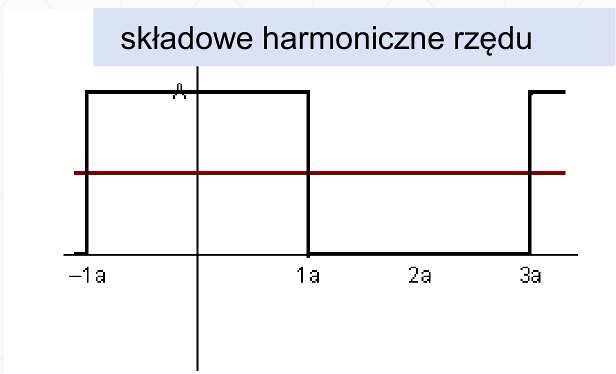
Analiza drgań Fouriera

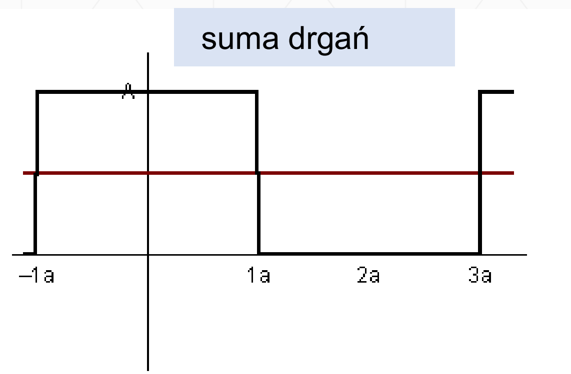
$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\,\omega t + b_n \cos n\,\omega t)$$

Każde drganie okresowe nieharmoniczne można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego zwanego szeregiem Fouriera, czyli w postaci sumy n drgań harmonicznych

$$y = \frac{A}{2} + \frac{2A\cos\omega\,t}{\pi} - \frac{2A\cos 3\,\omega t}{3\pi} + \frac{2A\cos 5\,\omega t}{5\pi} - \frac{2A\cos 7\,\omega t}{7\pi}$$

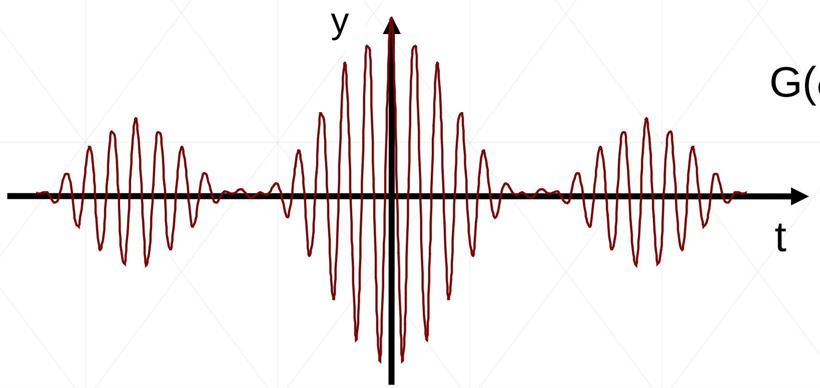


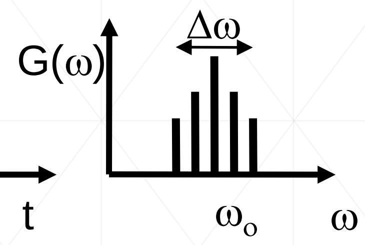




Superpozycja Fouriera

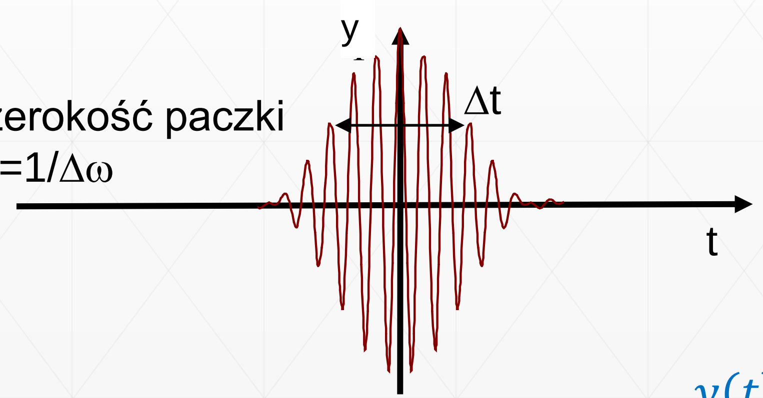
Dodając większą liczbę fal o częstościach bliskich ω_o boczne dudnienia ulegają stłumieniu. Poniżej wykres dla sumy 5 fal.

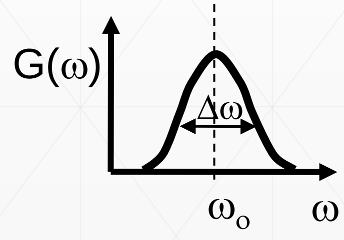




Przy sumowaniu nieskończonej liczby fal o częstościach bliskich ω_o i amplitudach opisanych funkcją Gaussa otrzymujemy pojedynczą paczkę falową.

szerokość paczki
$\Delta t = 1/\Delta\omega$





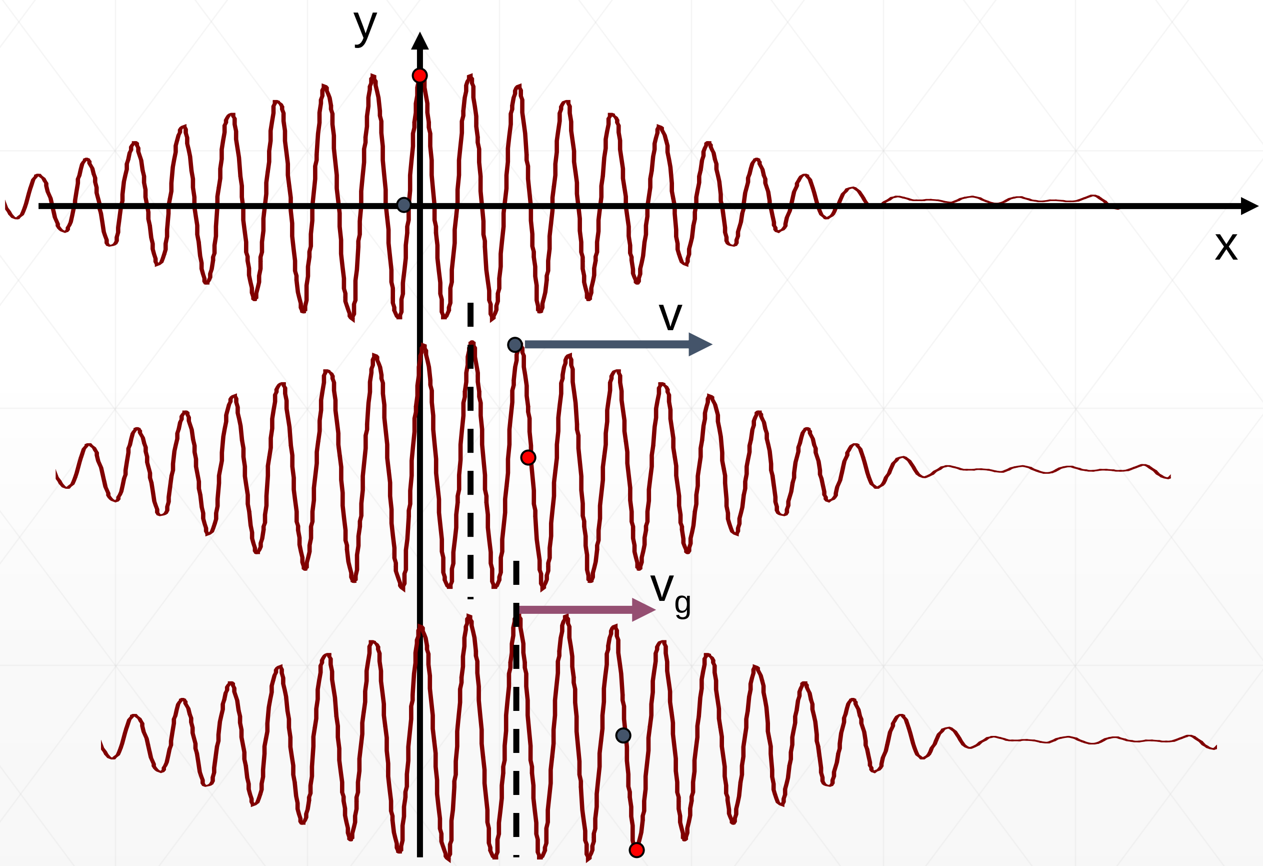
$$y(t) = \int_0^\infty G(\omega) \cos \omega t d\omega$$

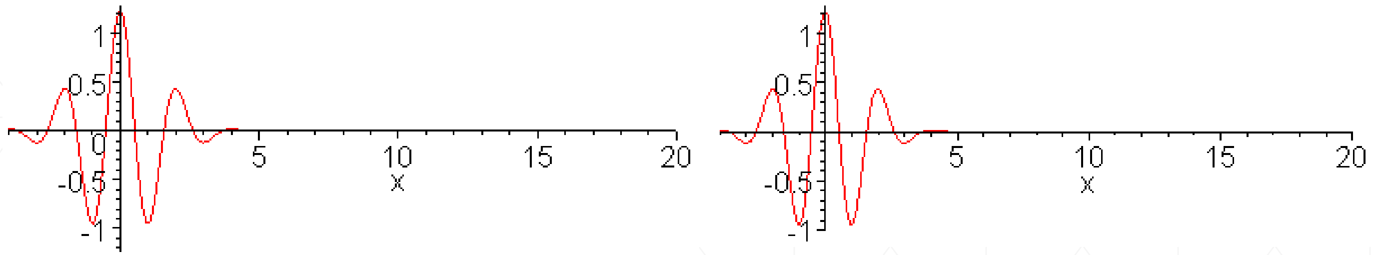
Paczka falowa

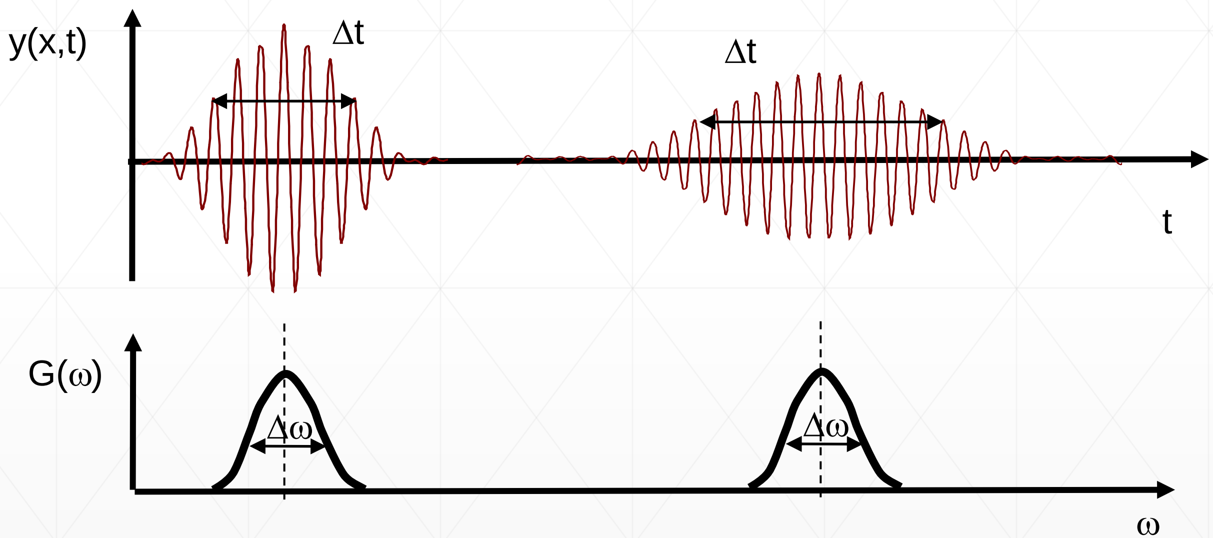
- w praktyce posługujemy się skończonymi ciągami falowymi tzw. paczkami falowymi
- paczka falowa powstaje w wyniku superpozycji fal harmonicznych o częstościach z przedziału $\Delta\omega$ i amplitudach opisanych funkcją Gaussa
- im mniejsze $\Delta\omega$ tym bardziej paczka falowa rozmyta jest w czasie
- paczka falowa rozchodzi się z prędkością grupową
- danej paczce falowej przyporządkowujemy odpowiednie pasmo liczb falowych Δk

$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)\Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g} = \frac{1}{v_g \cdot \Delta t} = \frac{1}{\Delta x}$$

Prędkość grupowa, a prędkość fazowa paczki falowej







$\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$

$\Delta k \cdot \Delta x > 1$

w ośrodku dyspersyjnym paczka falowa ulega deformacji (rozmyciu), gdyż poszczególne składowe propagują się z różnymi prędkościami
w ośrodku niedyspersyjnym paczka falowa nie ulega rozmyciu

Fale i cząstki

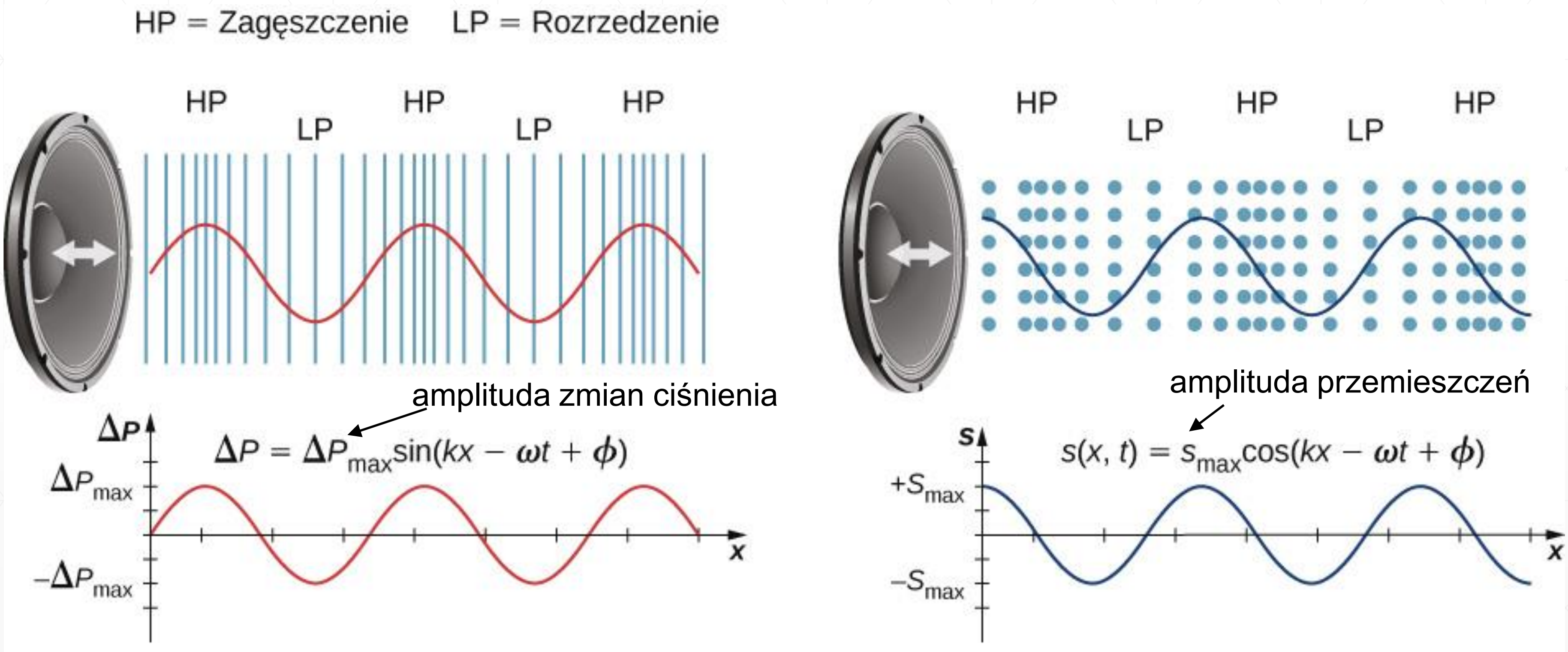
- **cząstki** – obiekty materialne, które poruszają się z jednego punktu do drugiego niosąc ze sobą informację i energię
- **fale** – informacja i energia przemieszczają się z jednego punktu do drugiego, mimo że żaden obiekt materialny nie przemieszcza się

„Często zdarza się, że fala ucieka z miejsca powstania, podczas gdy woda pozostaje, podobnie jest z falami, jakie wiatr wywołuje na polu zboża - widzimy fale biegnącą przez pole, podczas gdy zboże pozostaje w miejscu”

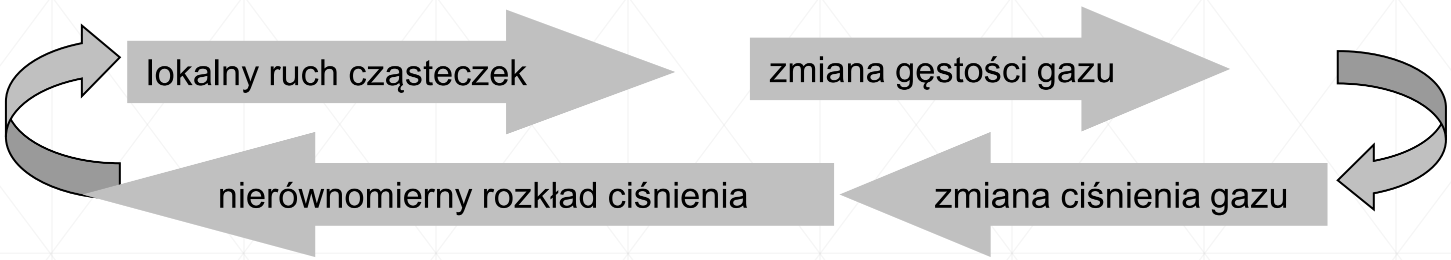
Leonardo da Vinci

Fale dźwiękowe w powietrzu

Fale dźwiękowe w powietrzu są przykładem fal podłużnych polegających na rozchodzeniu się zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza



Modele opisujące dźwięk



Dźwięk może być opisywany jako zmiany ciśnienia powietrza wokół wartości średniej:

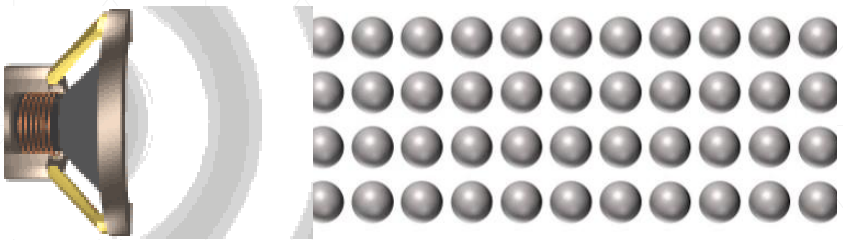
$$\Delta p(x,t) = \Delta p_{max} \sin(\omega t - kx)$$

Fale dźwiękowe mogą być modelowane za pomocą drgających cząsteczek powietrza:

$$s(x,t) = s_{max} \cos(\omega t - kx)$$

Związek pomiędzy ciśnieniem a wychyleniem określa zależność: $\Delta p_{max} = (v\rho\omega) s_{max}$

Prędkość dźwięku



- prędkość dźwięku zależy od sprężystości i bezwładności ośrodka,

$$v = \sqrt{sprężystość/bezwładność}$$

- prędkość dźwięku:
  - w strunie $v = \sqrt{F_T/\mu}$
  - w cieczy $v = \sqrt{B/\rho}$
  - w ciele stałym $v = \sqrt{\beta/\rho}$
  - w gazach $v = \sqrt{\gamma p_0/\rho}$

F_T - naprężenie struny

μ - gęstość liniowa masy

B - moduł ściśliwości

β - współczynnik sprężystości

ρ - gęstość ośrodka

γ - stała przemiany adiabatycznej

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$$

- powietrze 340 m/s, woda 1500 m/s, stal 6000 m/s

Fale dźwiękowe (akustyczne)

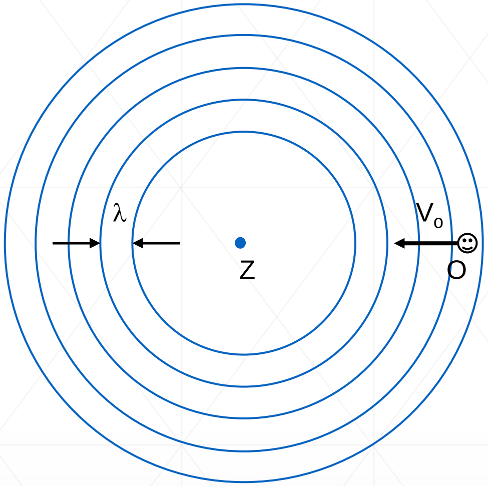
- dźwięki to podłużne fale sprężyste rozchodzące się w ciałach stałych, cieczach i gazach o częstotliwościach od 20 Hz (infradźwięki) do 20 kHz (ultradźwięki),

- ton – fala harmoniczna o określonej częstotliwości,
  wysokość dźwięku – jego częstotliwość, ton podstawowy i wyższe harmoniczne,
  natężenie – moc na jednostkę powierzchni, ~ A^2 i ω^2 (głośność)
  barwa dźwięku – zbiór fal o różnych częstotliwościach, zależy od rodzaju i natężenia tonów składowych (spektrum harmoniczne),

- głośność - poziom natężenia dźwięku $10\log(I/I_o)$ [dB]
  gdzie $I_o = 10^{-12}$ W/m^2 to natężenie odniesienia - dolna granica słyszalności (0 dB) (10 dB szelest liści, 60 dB normalna rozmowa, 120 dB granica bólu)

Zjawisko Dopplera – zmiana częstości wynikająca z wzajemnego ruchu obserwatora O i źródła Z

Nieruchome źródło Z wysyła fale koliste a obserwator O zbliża się do Z z prędkością v_0



v – prędkość dźwięku

v_o – prędkość obserwatora

Dla nieruchomego obserwatora $f = \dfrac{v}{\lambda}$

Dla obserwatora poruszającego się prędkość przybliżania się kolejnych powierzchni falowych jest większa $v' = v + v_0$

$$f' = \frac{v + v_o}{\lambda} = \frac{(v + v_o)f}{v} = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)$$

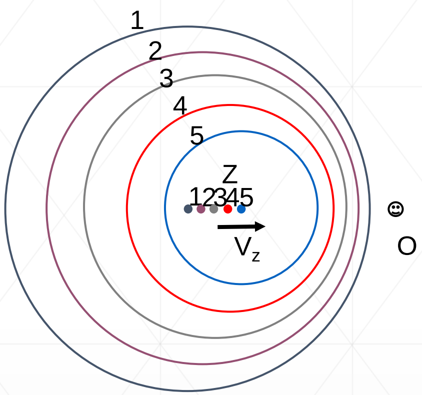
Zbliżający się obserwator odbiera fale o większej częstotliwości

Jakby się oddalał to v_0 jest ujemne i częstotliwość maleje

Zjawisko Dopplera – ruchome źródło

Nieruchomy obserwator źródło zbliża się do obserwatora fala ma mniejszą długość z przodu, a większą z tyłu

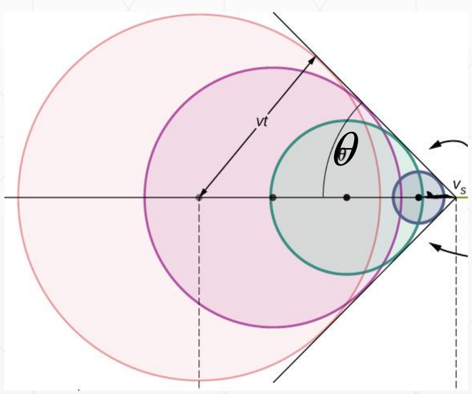
v_z – prędkość źródła



$$\lambda' = \frac{v}{f} - \frac{v_z}{f}$$

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{vf}{v - v_z} = f\,\frac{1}{1 - (v_z/v)}$$

gdy zbliża się częstotliwość jest większa



gdy prędkość źródła większa jest od prędkości dźwięku powstaje fala uderzeniowa

liczba Macha

$$M = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{v_z}{v}$$

Podsumowanie

- podaliśmy równanie fali biegnącej i jej podstawowe cechy: długość, częstotliwość, wektor falowy, prędkość grupową i prędkość fazową;
- energia przenoszona przez falę – proporcjonalna do kwadratu jej amplitudy,
- fale stojące = drgania normalne,
- opis fal w postaci paczki falowej,
- pojęcie ośrodków dyspersyjnych i niedyspersyjnych,
- właściwości fal akustycznych.

Dziękuję za uwagę