

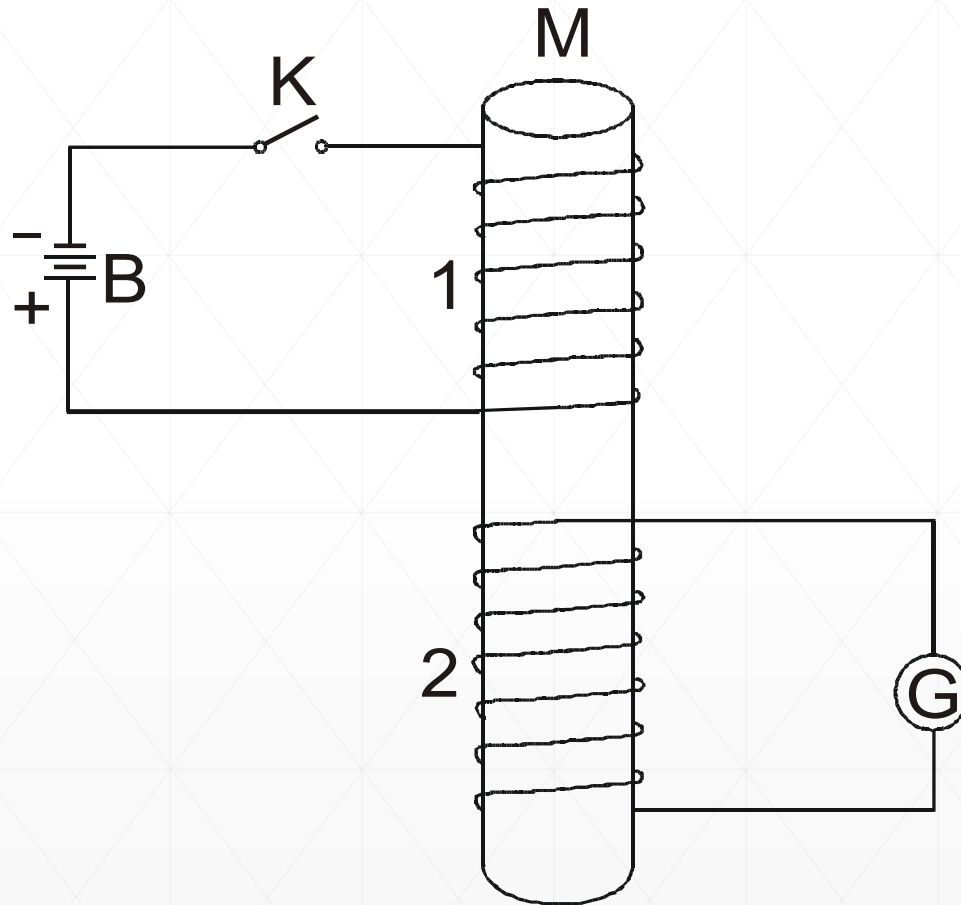
20. Indukcja elektromagnetyczna

- indukcja elektromagnetyczna,
- prawo Faradaya i reguła Lenza,
- indukcja wzajemna i indukcja własna,
- prądy wirowe,
- energia pola magnetycznego,
- uogólnione prawo Ampera - prąd przesunięcia,
- równania Maxwella.

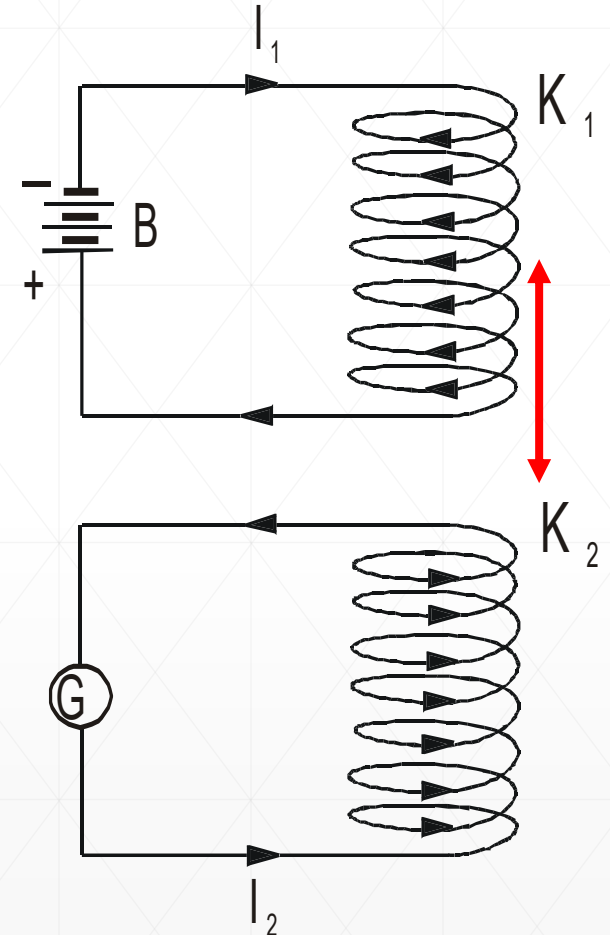


- Czy pole magnetyczne powoduje powstanie pola elektrycznego?

Doświadczenie Faraday'a

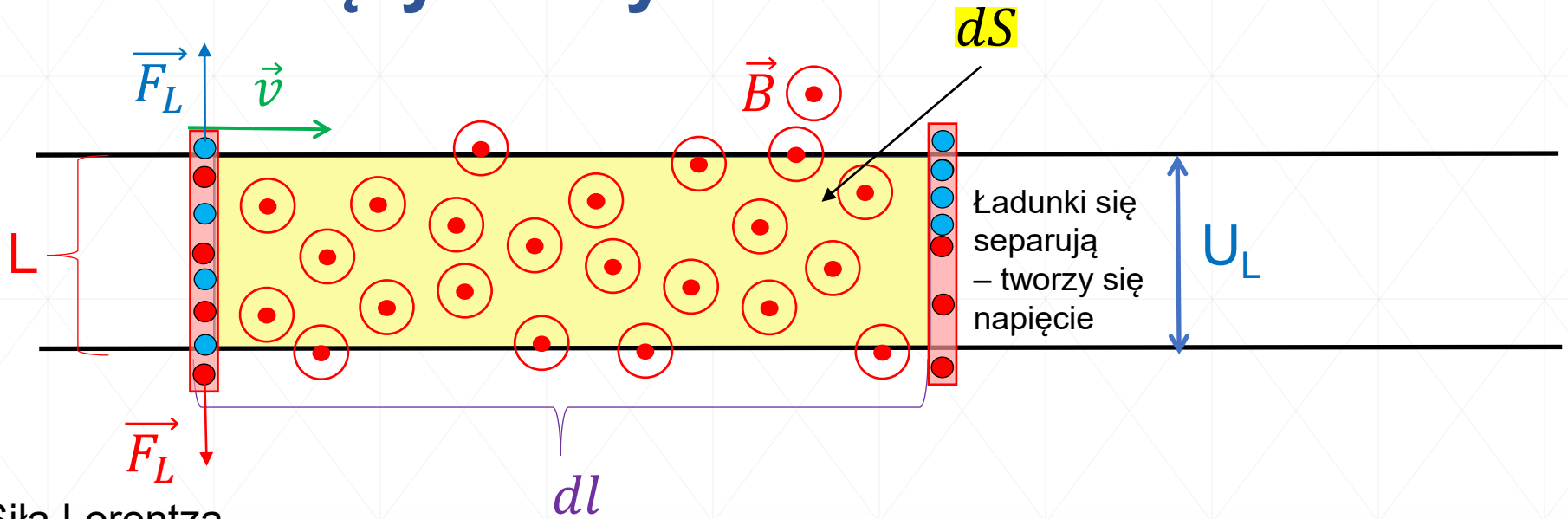


Zamknięcie lub otwarcie klucza K powoduje przepływ prądu w obwodzie 2



Na skutek poruszania cewką K₁ w cewce K₂ indukuje się prąd

Przewodząca poprzeczka na dwóch przewodzących szynach – siła Lorentza



dS

Ładunki się separują – tworzy się napięcie

U_L

dl

Siła Lorentza działająca na elektrony w poprzeczce:

$$F_L = evB$$

$$F_L = evB = \frac{U_L}{L} e$$

Siła Lorentza powoduje przesunięcie elektronów i wytworzenie napięcia U_L , które równoważy siłę Lorentza.

Stąd napięcie ma wartość:

$$U_L = \frac{LF_L}{e} = LvB = L \frac{dl}{dt} B = B \frac{Ldl}{dt} = \frac{BdS}{dt} = \frac{d\Phi_B}{dt}$$

W końcowym efekcie otrzymujemy wzór, który wyznacza napięcie powstające pomiędzy szynami jako pochodną czasową strumienia pola magnetycznego

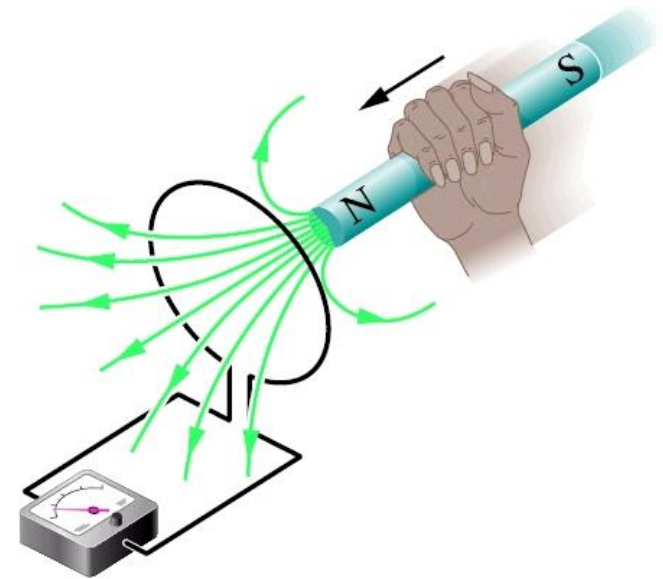
Prawo indukcji Faraday'a

Siła elektromotoryczna indukcji
równa się szybkości zmiany
strumienia indukcji magnetycznej

$$SEM = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

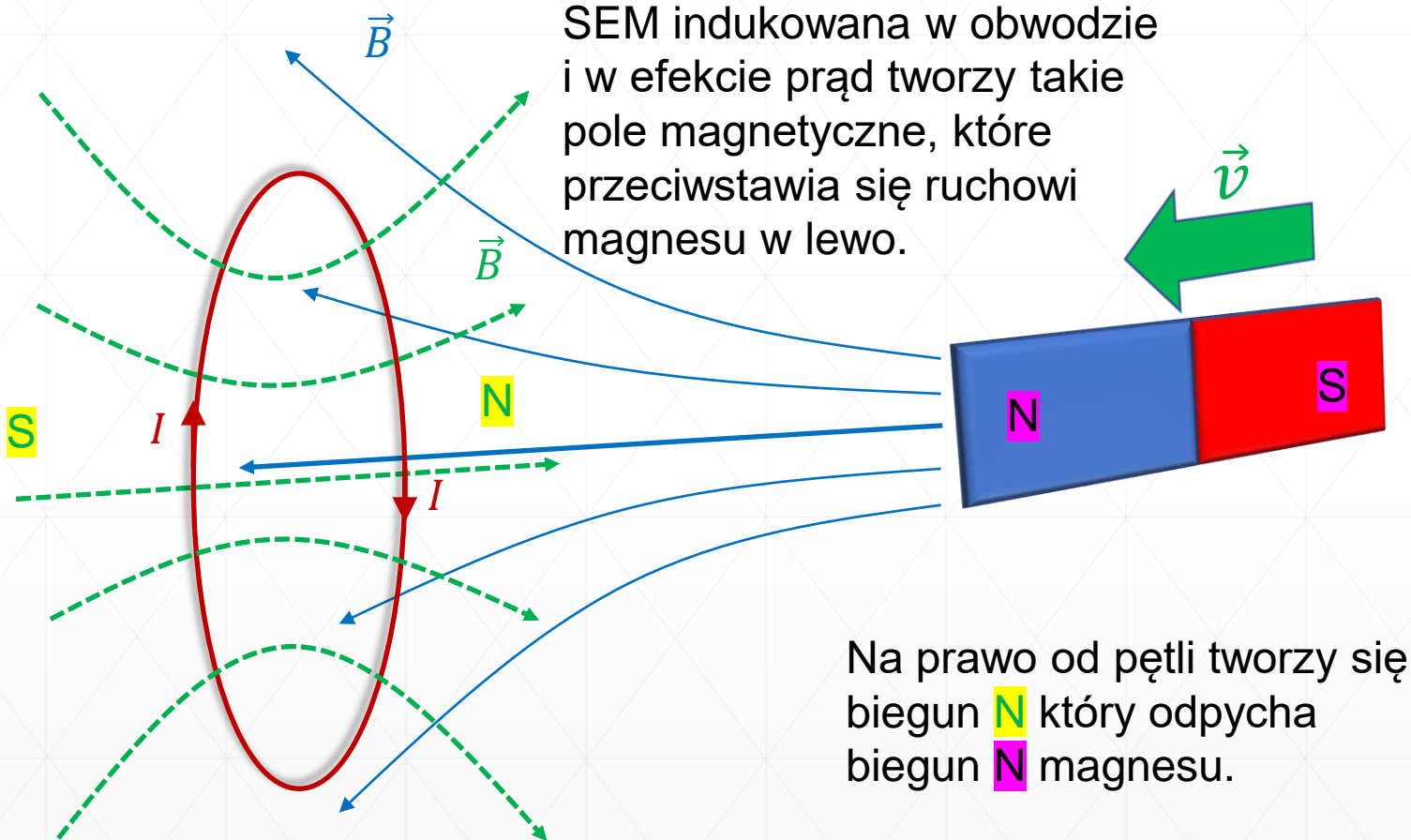


Cyrkulacja wektora natężenia pola elektrycznego wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej równa się szybkości zmian strumienia pola magnetycznego obejmowanego przez tę krzywą

Reguła Lenza

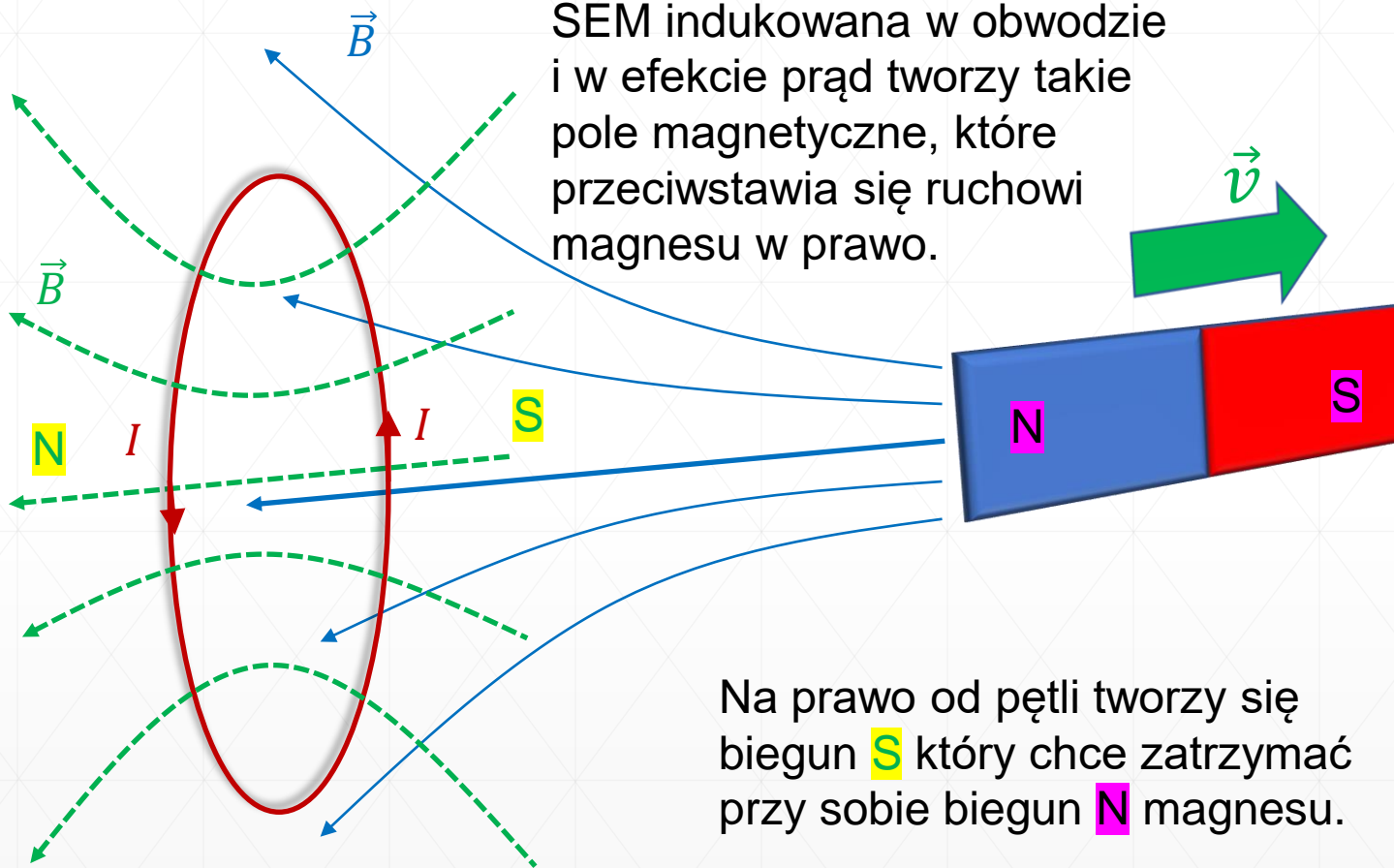
- prąd indukowany w obwodzie ma zawsze taki kierunek, że wytworzony przezeń strumień magnetyczny przez powierzchnię ograniczoną przez ten obwód **przeciwdziała zmianom strumienia**, które wywołały pojawienie się prądu indukowanego
- reguła Lenza jest konsekwencją zasady zachowania energii
- pole elektryczne wywołane zmianami indukcji magnetycznej powstaje niezależnie czy w polu są przewodniki czy nie
- pole elektryczne wywołane przez zmiany strumienia nie jest polem zachowawczym – jest polem wirowym

Kierunek indukowanego napięcia (prądu) w obwodzie

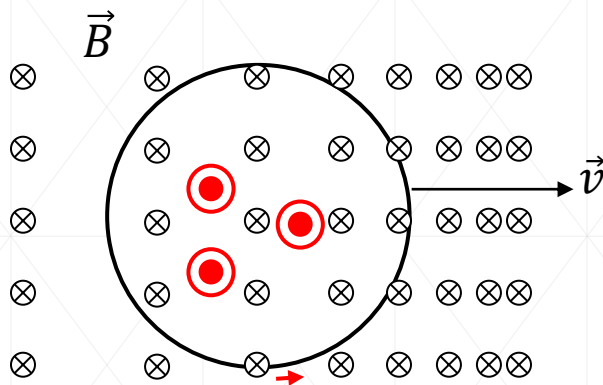
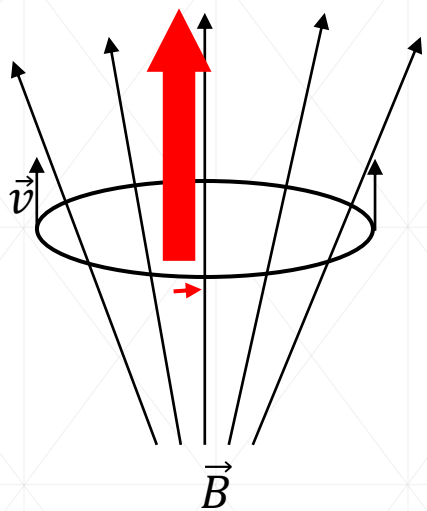


Kierunek indukowanego napięcia (prądu) w obwodzie

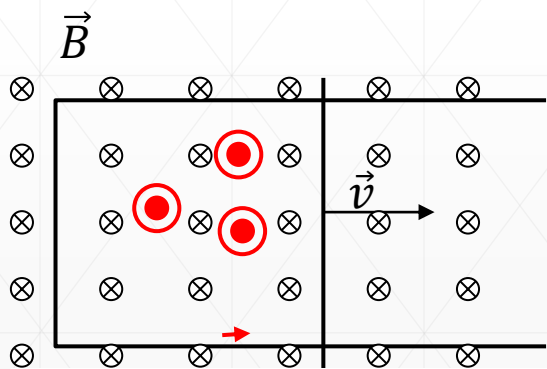
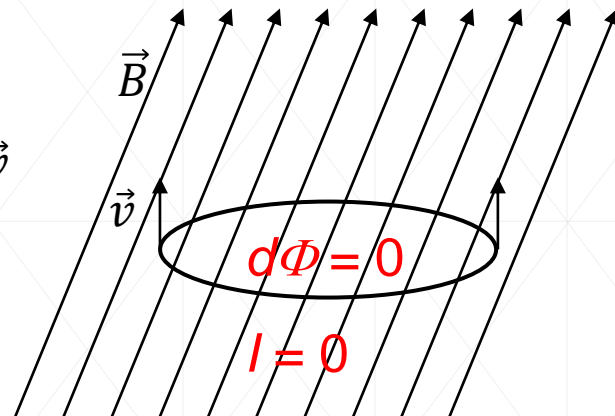
SEM indukowana w obwodzie i w efekcie prąd tworzy takie pole magnetyczne, które przeciwstawia się ruchowi magnesu w prawo.



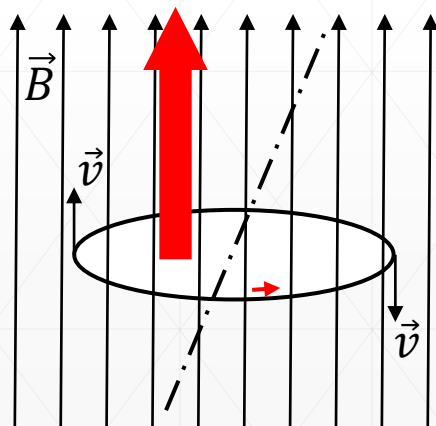
Na prawo od pętli tworzy się biegun **S** który chce zatrzymać przy sobie biegun **N** magnesu.



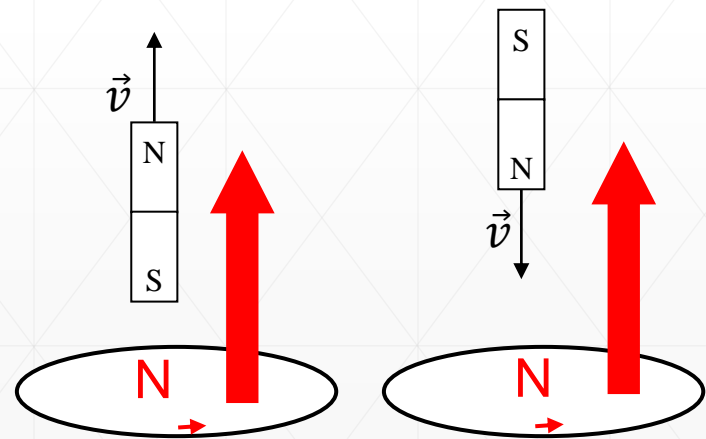
⊗ pole skierowane za kartkę



pręt porusza się po szynach
w jednorodnym polu



Obrót pętli o 90°
w jednorodnym polu



Magnes porusza się
względem obwodu

Indukcja własna

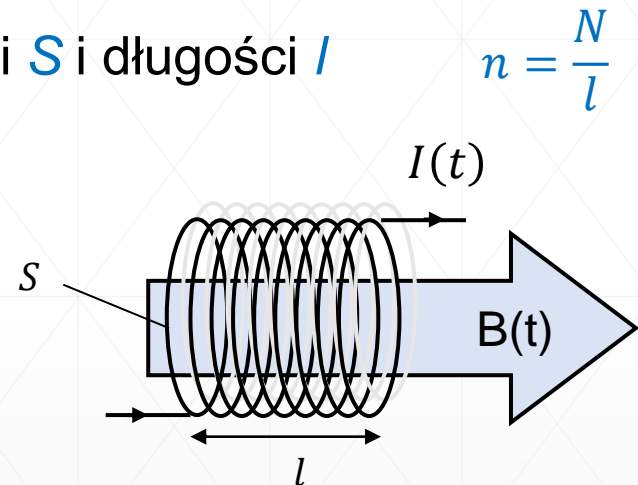
- **samoindukcja** – indukcja siły elektromotorycznej w obwodzie przez płynący w nim prąd zmienny
- w solenoidzie o N zwojach, powierzchni S i długości l płynący zmienny prąd I wytwarza SEM

$$\left. \begin{aligned} B &= \mu_0 \mu_r n I \\ \Phi_B &= N B S \end{aligned} \right\} \Phi_B = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 I}{l} S$$

$$SEM = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} S \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

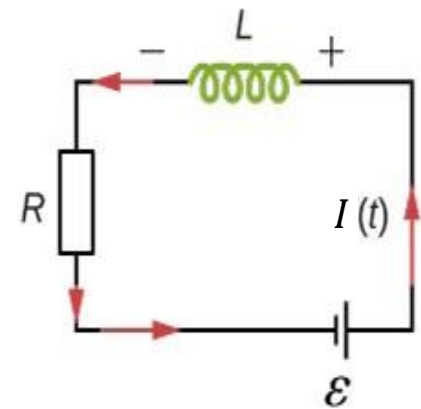
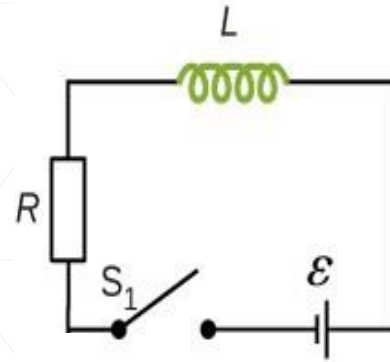
$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} S$$

gdzie L nazywa się indukcyjnością solenoidu [H (henr) = Vs/A] i zależy od jego kształtu, rozmiarów i własności magnetycznych ośrodka



Obwody RL

Obwód RL z przełącznikami S_1 i S_2 . Przedstawione są obwody otrzymane przez (b) zamknięcie S_1 i pozostawienie S_2 otwartym, (c) zamknięcie S_2 i pozostawienie S_1 otwartym.



Na mocy prawa Kirchoffa mamy:

$$\mathcal{E} + SEM - IR = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0$$

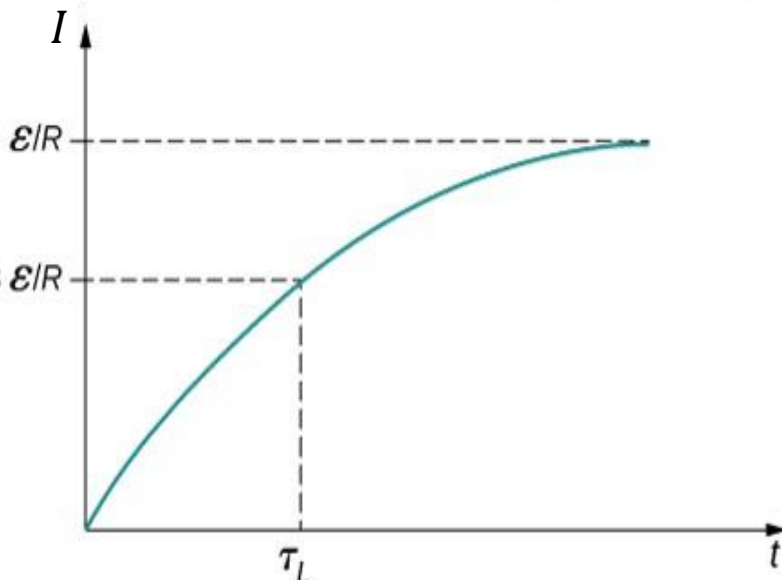
którego rozwiązaniem jest:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

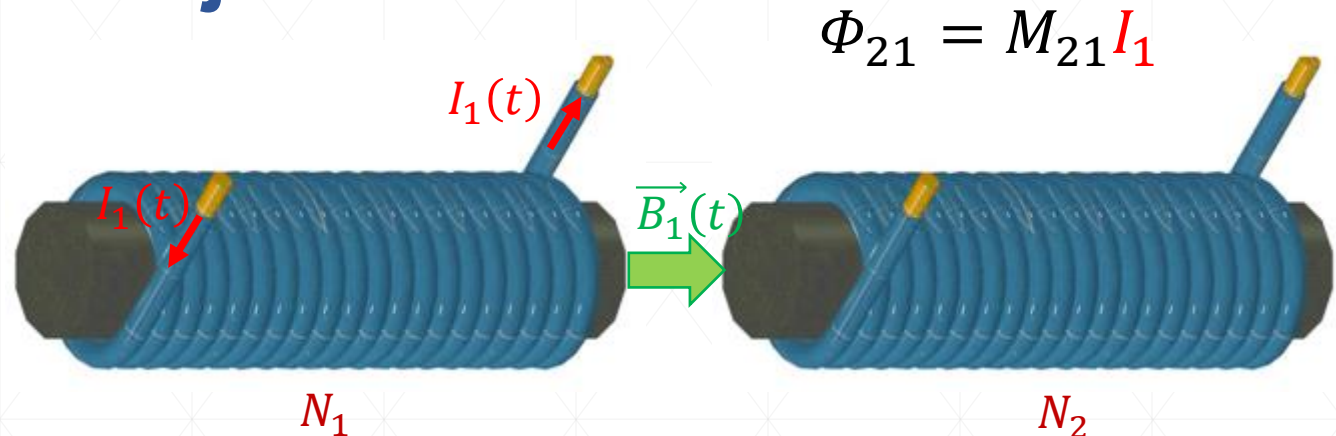
gdzie

$$\tau = L/R$$

Po zamknięciu klucza S_1 prąd $I(t)$ początkowo jest równy zero, a następnie rośnie asymptotycznie do wartości końcowej $I = \mathcal{E}/R$



Indukcja wzajemna



- Jeśli siła elektromotoryczna indukcji wzbudzona jest w przewodniku, który znajduje się w zmiennym polu magnetycznym wytworzonym przez inny przewodnik, to mówimy o indukcji wzajemnej

$$SEM_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

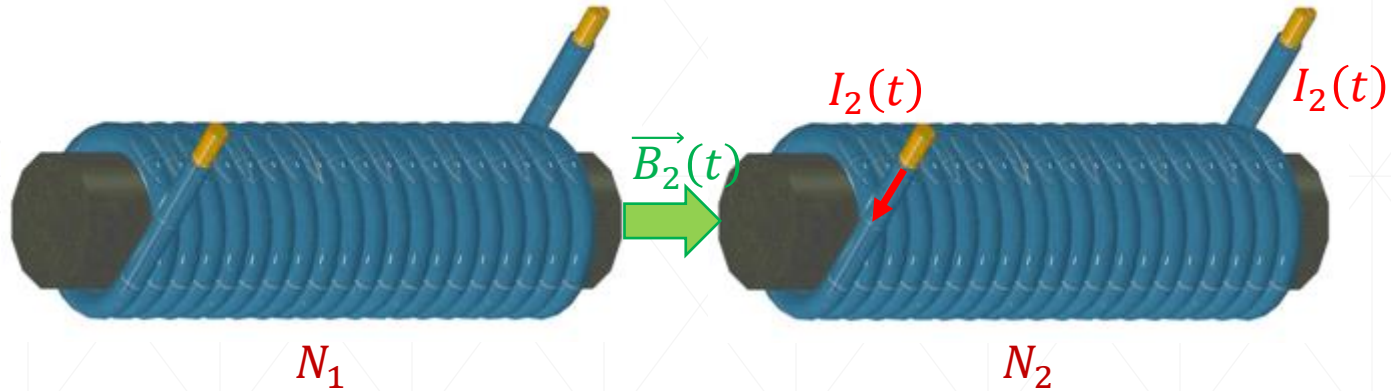
- M_{12} ; M_{21} są współczynnikami indukcji wzajemnej

$$SEM_{21} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt} \qquad SEM_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

- $M_{12} < (L_1 L_2)^{1/2}$, gdyż linie sił pola ulegają rozproszeniu – nie występuje doskonałe sprzężenie między obwodami

Indukcja wzajemna

Oba współczynniki M_{12} i M_{21} zależą od: rozmiarów geometrycznych cewek, wzajemnej odległości pomiędzy obwodami, wzajemnego ukierunkowania tych cewek i liczby zwojów N_1 i N_2 tych cewek.



Jednostką indukcyjności wzajemnej w układzie SI jest 1 henr (1 H):

$$[H] = \left[\frac{T \cdot m^2}{A} \right] = \left[\frac{N \cdot m^2}{A \cdot m \cdot A} \right] = \left[\frac{N \cdot m}{A^2} \right] = \left[\frac{J \cdot s}{A \cdot s \cdot A} \right] = \left[\frac{J \cdot s}{C \cdot A} \right] = \left[\frac{V \cdot s}{A} \right]$$

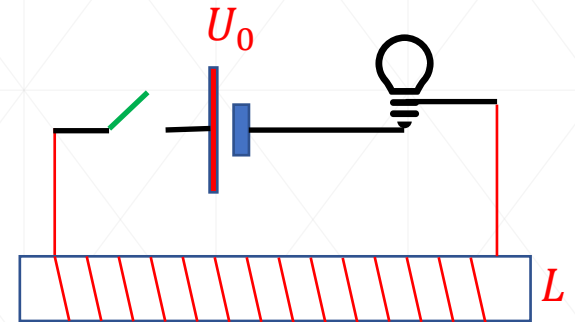
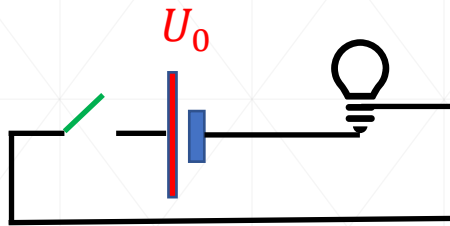
Indukcyjność wzajemna jest równa 1 H jeżeli prąd 1 A płynący w obwodzie pierwszym generuje w obwodzie drugim strumień indukcji pola magnetycznego równy 1 T m^2 .

Można udowodnić, że w przypadku ośrodka jednorodnego i nieferromagnetycznego indukcje wzajemne obu obwodów są sobie równe i są oznaczane $M = M_{12} = M_{21}$ 12

Skutki działania samoindukcji

Założmy, że mamy dwa proste obwody zasilane stałym napięciem.

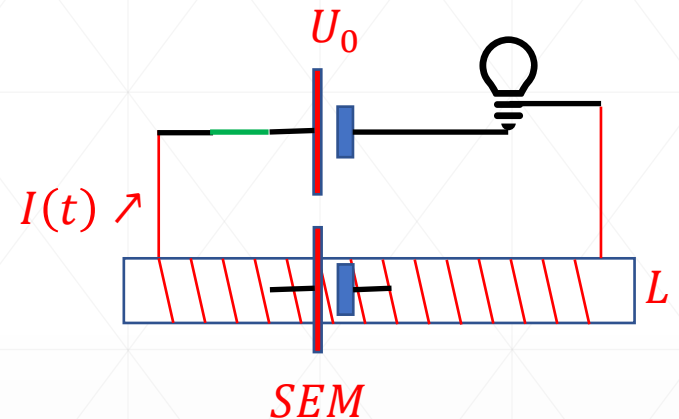
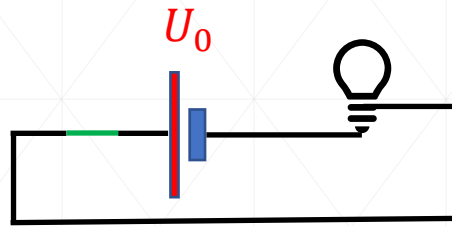
Lewy składa się ze źródła zasilania i żarówki, a prawy ze źródła zasilania, żarówki i cewki o indukcyjności L .



Co się stanie gdy włączymy zasilanie do obwodów?

Skutki działania samoindukcji

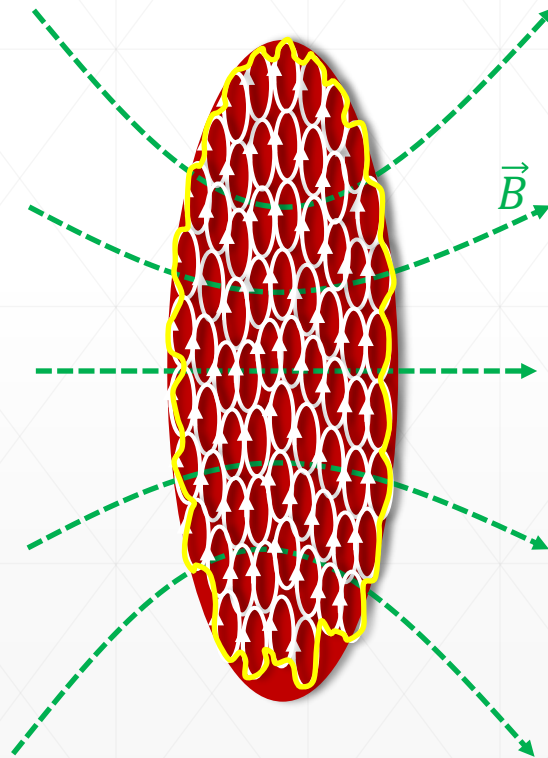
Po włączeniu zasilania żarówka w układzie lewym rozświetla się od razu pełnym światłem natomiast żarówka w układzie prawym rozświetla się powoli. Im jest większa indukcyjność cewki tym proces rozświetlenia trwa dłużej.



Dzieje się tak ponieważ po włączeniu zasilania prąd wzrasta. Cewka się temu przeciwstawia i generuje SEM , które się odejmuje od napięcia zasilania U_0 . W efekcie tego na żarówkę działa efektywnie różnica napięcia $U_0 - SEM$. Im bardziej prąd się stabilizuje tym ta różnica jest większa (bo zmniejsza się SEM) i żarówka w efekcie końcowym dochodzi do rozświetlenia właściwego – takiego jak w przypadku żarówki lewej.

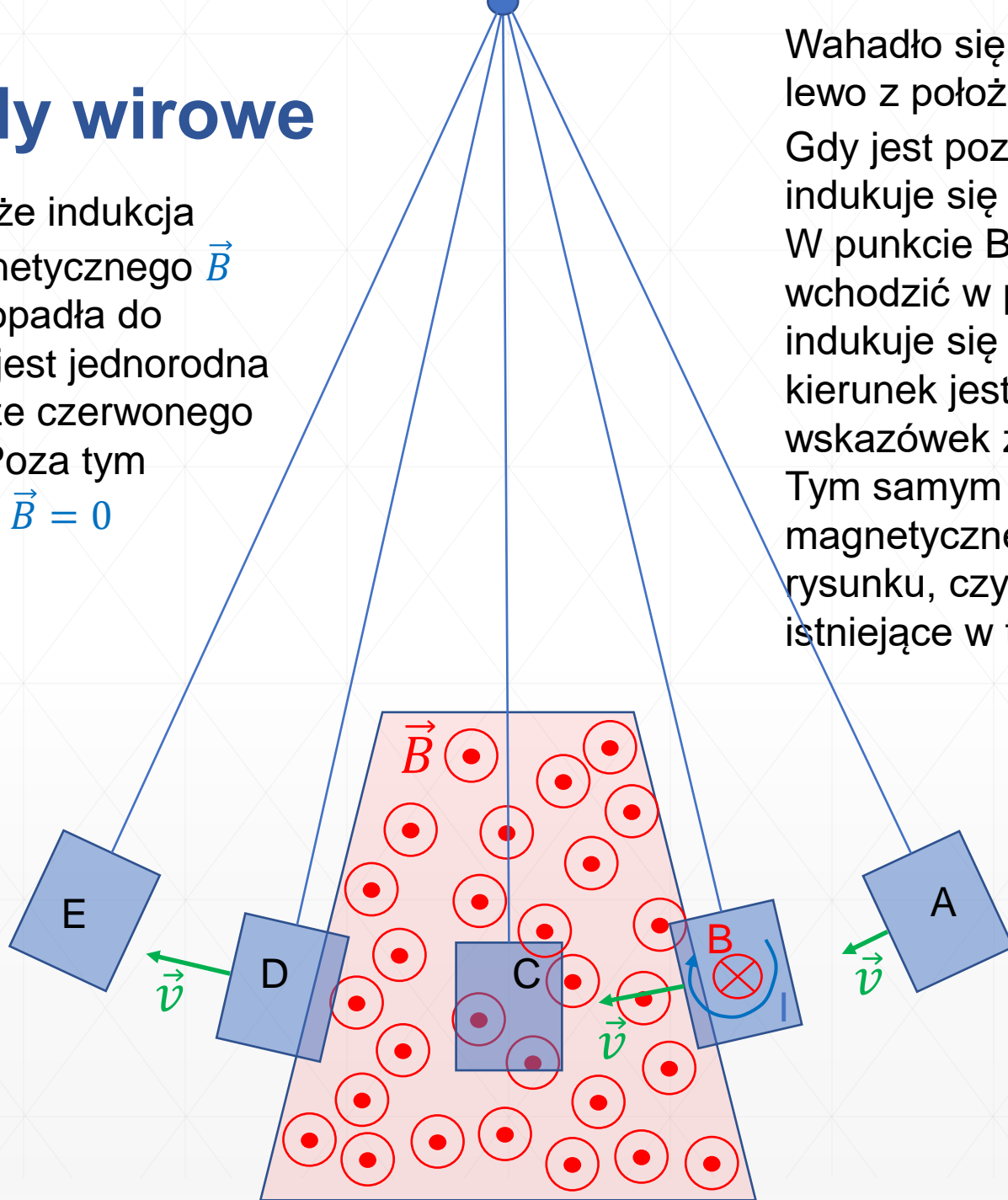
Przykłady: prądy wirowe

Prądy wytwarzane w ośrodkach przewodzących, które zgodnie z regułą Lenza przeciwstawiają się przyczynie, dzięki której są wytwarzane.



Prądy wirowe

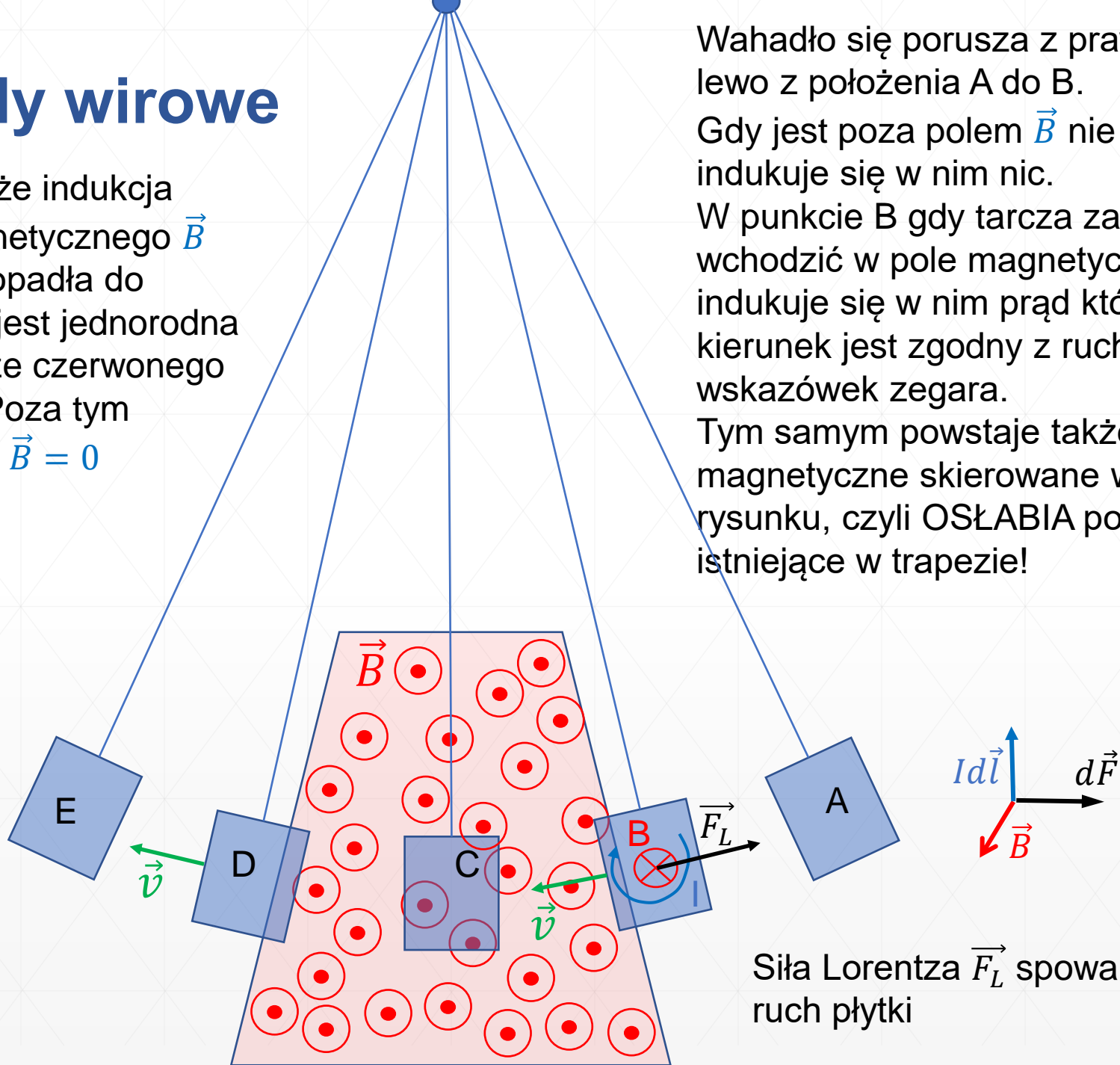
Założmy, że indukcja pola magnetycznego \vec{B} jest prostopadła do rysunku i jest jednorodna w obszarze czerwonego trapezu. Poza tym obszarem $\vec{B} = 0$



Wahadło się porusza z prawa na lewo z położenia A do B. Gdy jest poza polem \vec{B} nie indukuje się w nim nic. W punkcie B gdy tarcza zaczyna wchodzić w pole magnetyczne indukuje się w nim prąd którego kierunek jest zgodny z ruchem wskazówek zegara. Tym samym powstaje także pole magnetyczne skierowane w głąb rysunku, czyli OSŁABIA pole istniejące w trapezie!

Prądy wirowe

Założmy, że indukcja pola magnetycznego \vec{B} jest prostopadła do rysunku i jest jednorodna w obszarze czerwonego trapezu. Poza tym obszarem $\vec{B} = 0$



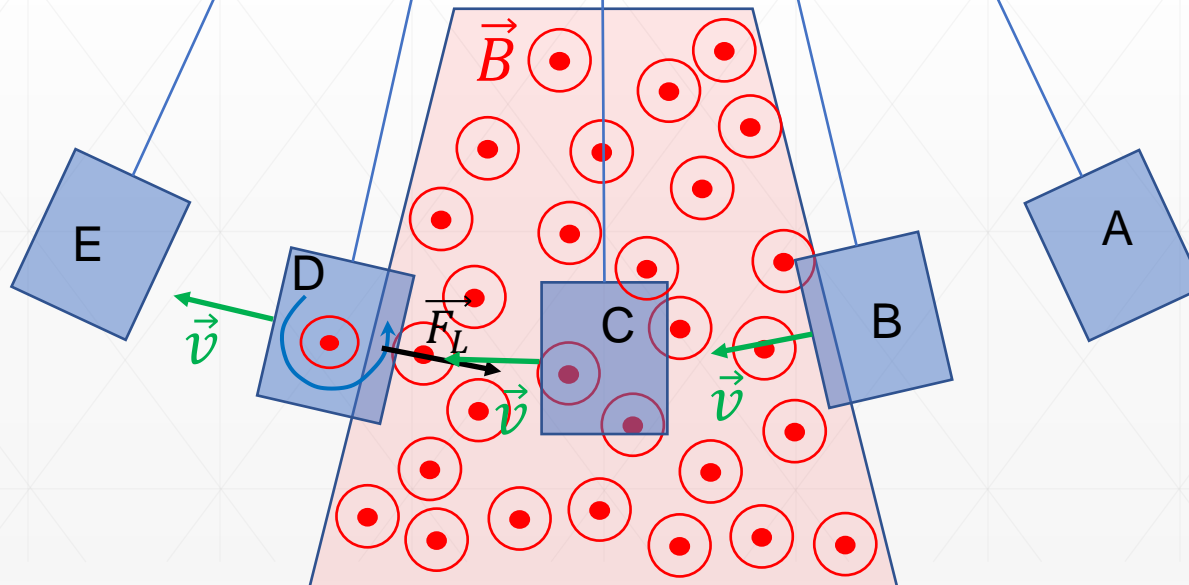
Wahadło się porusza z prawa na lewo z położenia A do B. Gdy jest poza polem \vec{B} nie indukuje się w nim nic. W punkcie B gdy tarcza zaczyna wchodzić w pole magnetyczne indukuje się w nim prąd którego kierunek jest zgodny z ruchem wskazówek zegara. Tym samym powstaje także pole magnetyczne skierowane w głąb rysunku, czyli OSŁABIA pole istniejące w trapezie!

Siła Lorentza \vec{F}_L spowalnia ruch płytki

Prądy wirowe

Jak płytka znajdzie się całkowicie w obszarze jednorodnego pola \vec{B} nie indukują się w niej prądy wirowe i nie działa na nią żadna dodatkowa hamująca siła.

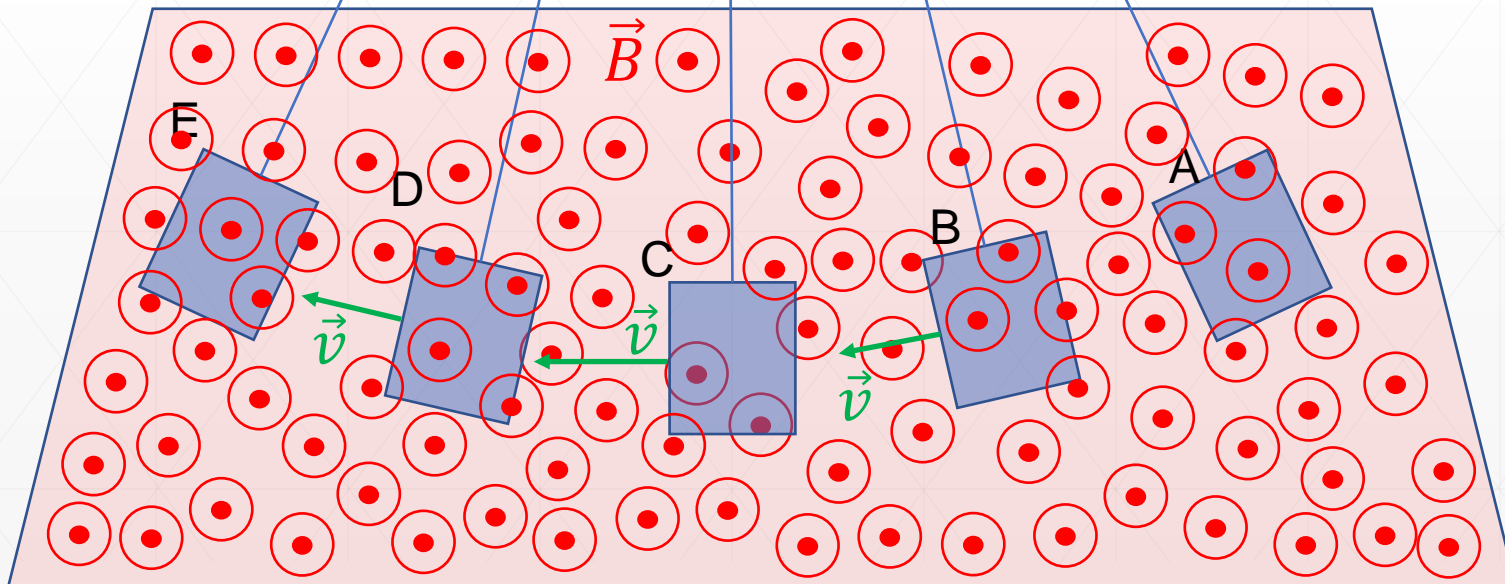
Gdy płytka wychodzi z pola magnetycznego \vec{B} wówczas indukuje się prąd przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Wytwarza on pole, które wspomaga pole zewnętrzne. Jest to zrozumiałe bo pole zewnętrzne „maleje” i reguła Lenza wymusza jego wzmocnienie. Prąd ten daje nam siłę Lorentza która działa w prawo czyli spowalnia ruch płytki.



Prądy wirowe

Gdy tarcza jest z materiału nieprzewodzącego prądu, to nie obserwujemy prądów wirowych i zjawiska wyhamowywania ruchu wahadła.

Gdyby pole magnetyczne rozciągało się tak jak jest to zaprezentowane na rysunku, to również nie obserwowalibyśmy prądów wirowych i zjawiska wyhamowywania ruchu wahadła.



Prądy wirowe - zastosowania



Prądy wirowe (indukowane zmiennym polem magnetycznym) są stosowane w hamulcach magnetycznych np. w rowerach stacjonarnych czy rolercoasterach.



Prądy wirowe prądami indukowanymi w piecach indukcyjnych. W takich piecach albo tygiel musi być z materiału przewodzącego albo materiał ogrzewany taki być musi.



Prądy wirowe pozwalają oddzielić metalowe śmieci od niemetalowych.

Prądy wirowe są częściowo wykorzystywane w kuchenkach indukcyjnych.



Energia pola magnetycznego

Wcześniej w ramach wykładu o polu elektrycznym zostało pokazane, że pole elektryczne zawiera w sobie energię. Wystarczy, że w przestrzeni jest niezerowy wektor natężenia pola elektrycznego \vec{E} to gęstość energii tego pola wynosi:

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \quad \text{dla próżni}$$

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 E^2 \quad \text{dla ośrodka materialnego o przenikalności } \varepsilon_r$$

Analogicznie w przypadku istnienia w przestrzeni indukcji pola magnetycznego \vec{B} jest tam zgromadzona energia pola magnetycznego o gęstości:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad \text{dla próżni}$$

$$u_B = \frac{1}{2\mu_r \mu_0} B^2 \quad \text{dla ośrodka materialnego o przenikalności } \mu_r$$

Energia pola magnetycznego zgromadzona w cewce o indukcyjności L

W cewce wypełnionej powietrzem pole magnetyczne o indukcji \vec{B} gromadzi się właściwie w jej wnętrzu, więc całkowita energia zgromadzona w tej cewce wynosi:

$$E_p = V u_B = Sl \frac{1}{2\mu_0} B^2 = Sl \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 IN}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 SN^2}{l} I^2$$

gdzie:

V – objętość cewki,

S – pole powierzchni poprzecznej cewki,

l – długość cewki,

N – ilość zwojów cewki,

I – prąd płynący w cewce.

wcześniej
oznaczyliśmy: $\frac{\mu_0 SN^2}{l} = L$ stąd: $E_p = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 SN^2}{l} I^2 = \frac{1}{2} LI^2$

Analogia pomiędzy energią zgromadzoną w cewce o indukcyjności L i w kondensatorze o pojemności C

Kondensator o pojemności C służy do gromadzenia energii pola elektrycznego, która jest związana z pojawieniem się napięcia U na okładkach kondensatora. Cewka służy do gromadzenia energii pola magnetycznego, która jest związana z przepływem prądu I przez cewkę. Wzory na energie są bardzo podobne:

$$E_p = \frac{1}{2} C U^2$$

Energia zgromadzona
w kondensatorze

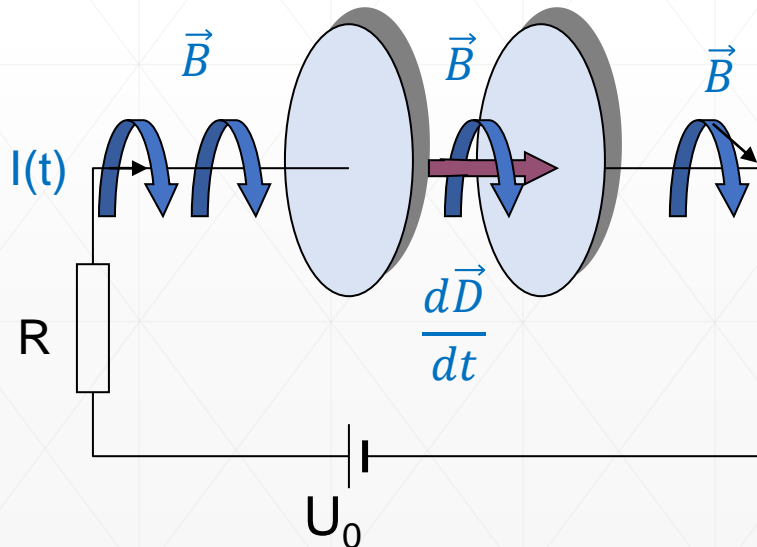
$$E_p = \frac{1}{2} L I^2$$

Energia zgromadzona
w cewce

- jeśli zmienne pole magnetyczne powoduje powstanie pola elektrycznego, to czy zmiany pola elektrycznego nie powodują powstania pola magnetycznego?

Indukowane pole magnetyczne

rozważmy płaski kondensator ładowany przez opór R ze źródła o stałej sile elektromotorycznej



wokół przewodnika powstaje pole magnetyczne, a co w obszarze między okładkami?

Prąd przesunięcia

Indukcja pola pomiędzy okładkami wynosi:

$$D = \frac{Q}{S}$$

$$dD = \frac{dQ}{S}$$

$$\frac{dD}{dt} \cdot S = \frac{dQ}{dt} = I$$



dla pola niejednorodnego

$$I = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

dla stałej pow. S

$$\Phi_D = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad \text{to zmiana} \quad \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = I$$

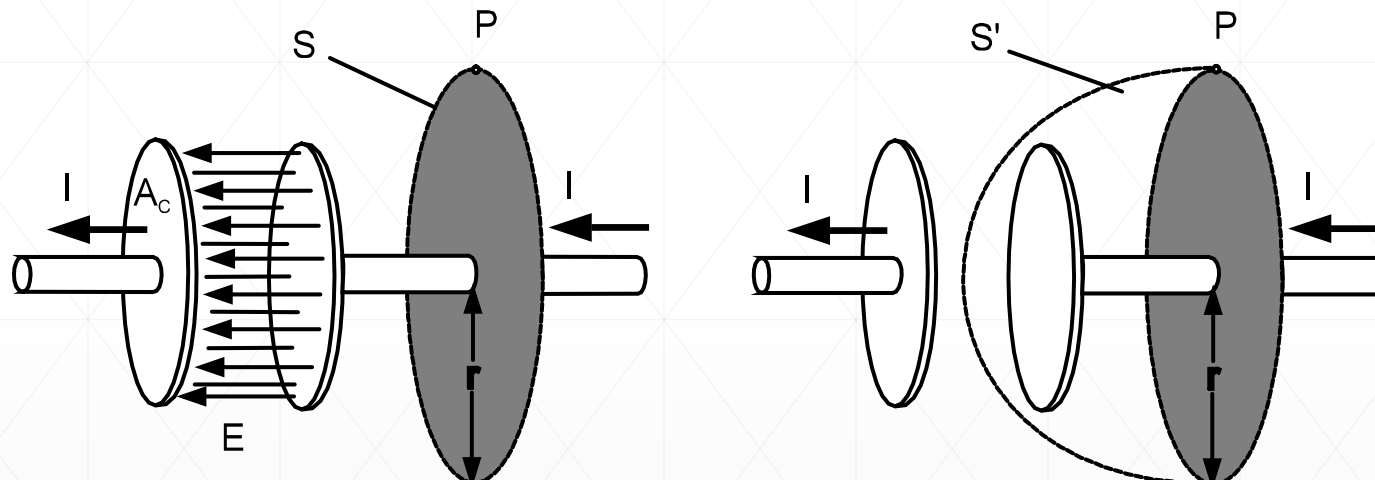
Podczas ładowania kondensatora w obszarze między okładkami zmienia się strumień indukcji D , przy czym szybkość zmian tego strumienia jest równa natężeniu prądu I dopływającego do kondensatora

$$I_p = \frac{d\Phi_D}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

- prąd przesunięcia

Uogólnione prawo Ampera

- prawo Ampera powinno być spełnione dla dowolnej powierzchni rozpiętej na okręgu



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I + I_P) = \mu_0 \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \longrightarrow \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Równania Maxwella

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

równania materiałowe

- Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho dV$$

wiąże wypadkowy strumień elektryczny z ładunkiem elektrycznym objętym powierzchnią Gaussa

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

wiąże wypadkowy strumień magnetyczny z ładunkiem magnetycznym objętym powierzchnią Gaussa

- Prawo indukcji elektromagnetycznej

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

wiąże indukowane pole elektryczne ze zmiennym strumieniem magnetycznym

- Uogólnione prawo Ampera

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

wiąże indukowane pole magnetyczne ze zmiennym strumieniem elektrycznym i z prądem

Porównanie dwóch równań Maxwella

Weźmy równania Maxwella mówiące o tworzeniu pola magnetycznego z pola elektrycznego i vice versa. Widać dużą symetrię. Asymetria jest w miejscu zaznaczonym **czerwoną ramką**.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \boxed{-} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Prawo indukcji Faradaya

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Uogólnione Prawo Ampere'a

Znak „-” pojawia się tylko w Prawie Faradaya, w uogólnionym Prawie Ampere'a tego znaku nie ma. Gdyby znaki „-” były w obu równaniach równania nie dałyby równania fali elektromagnetycznej.

Równania Maxwella w postaci różniczkowej

- Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

źródłowość pola – ładunek elektryczny wytwarza pole elektryczne

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

nie istnieje ładunek magnetyczny, pole magnetyczne jest bezźródłowe

- Prawo indukcji elektromagnetycznej

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

zmiennie pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne (prąd elektryczny)

- Uogólnione prawo Ampera

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

prąd elektryczny lub zmienne pole elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne

Cechy równań Maxwella

- Równania Maxwella stanowią fundamentalną podstawę teorii zjawisk elektromagnetycznych, podobnie jak zasady dynamiki Newtona są podstawą mechaniki.
- Zebranie i skojarzenie czterech równań wiążących pole elektryczne i magnetyczne w jeden układ równań było pod koniec XIX wieku tryumfem elektrodynamiki klasycznej.
- Można znaleźć pola \vec{E} i \vec{B} w dowolnym punkcie przestrzeni i w dowolnej chwili czasu, jeżeli znane są współrzędne i prędkości ładunków wytwarzających pola.
- Równania Maxwella są niesymetryczne względem pól elektrycznego i magnetycznego (istnieją ładunki elektryczne a brak jest ładunków magnetycznych).
- W przypadku stacjonarnym pola \vec{E} i \vec{B} są niezależne:

$$\oint_C \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho dV$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$$

Podsumowanie

- znać prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya,
- rozumieć regułę przekory Lenza,
- pojęcie indukcyjności własnej i wzajemnej,
- przykłady zastosowania prawa Faradaya - prądy wirowe,
- uogólnione prawo Ampera - prąd przesunięcia,
- znać równania Maxwella i rozumieć ich sens.