

17. Prąd elektryczny

- prąd elektryczny,
- prawo Ohma,
- praca i moc prądu elektrycznego,
- prawa Kirchhoffa,
- rodzaje obwodów elektrycznych.



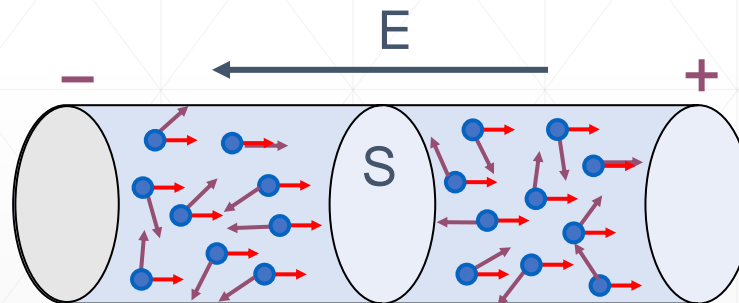
Prąd elektryczny

- elektrostatyka dotyczyła ładunków w spoczynku
- natomiast uporządkowany ruch ładunku to **prąd elektryczny**
- prądy elektryczne mogą płynąć w różnych ośrodkach: w próżni, gazie, cieczy lub w ciałach stałych
- rozpatrzemy ruch elektronów poruszających się swobodnie w metalicznych przewodnikach
- przewodnik (metal) to ciało stałe o dużej przewodności elektrycznej właściwej (**konduktywności**), np. drut miedziany

Ruch elektronów chaotyczny i uporządkowany

Bez pola elektrycznego elektrony poruszają się przypadkowo we wszystkich kierunkach w wyniku zderzeń z jonami sieci.

Chaotyczny ruch cieplny z prędkością v_t nie daje przepływu prądu.



$$v_t = 10^6 \text{ m/s}$$

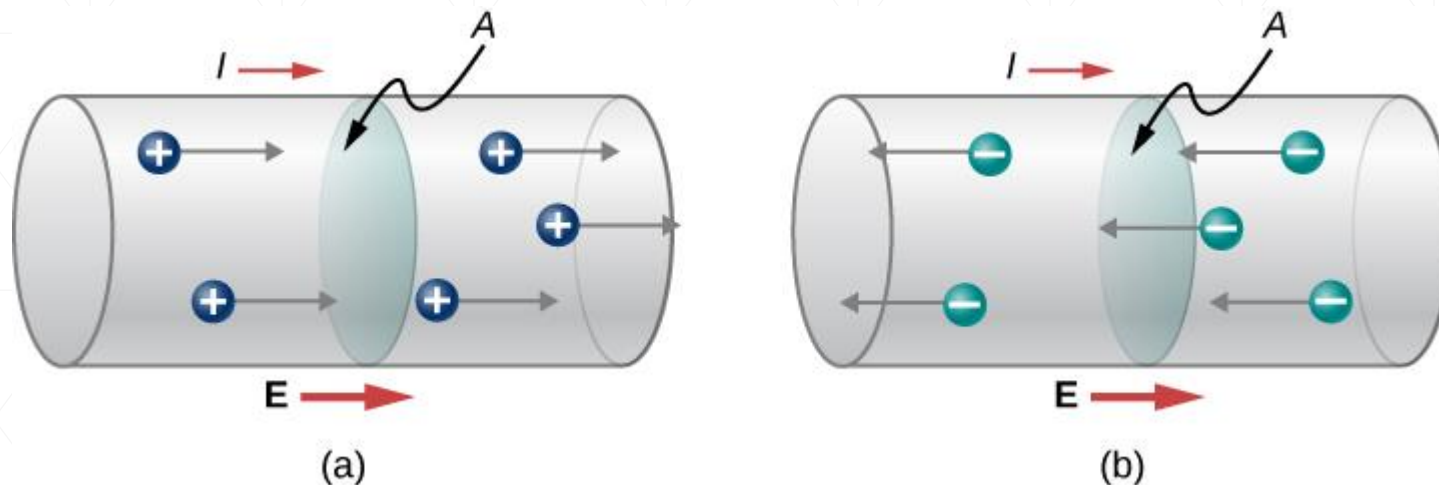
$$v_d = 10^{-5} \text{ m/s}$$

$$v_d = 36 \text{ mm/h}$$

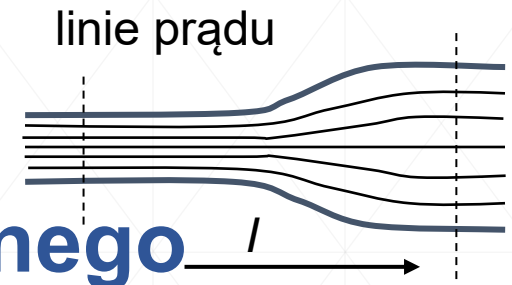
Po przyłożeniu pola elektrycznego na elektrony działa siła powodująca ich ruch w kierunku przeciwnym do kierunku pola.

Uporządkowany ruch ładunku z prędkością dryftu v_d to prąd elektryczny.

Kierunek prądu - pomyłka Franklina



Franklin nie znał ani elektronów ani protonów. Założył, że poruszają się ładunki dodatnie. Ale przepływ ładunków dodatnich w prawo daje taki sam efekt jak przepływ takiej samej liczby ładunków ujemnych w stronę przeciwną. Określając kierunek prądu I zaznaczamy go w kierunku ruchu ładunków dodatnich.



Natężenie prądu elektrycznego

- natężenie prądu elektrycznego to ilość ładunku przepływająca przez dany przekrój w jednostce czasu

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{stałe}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{chwilowe}$$

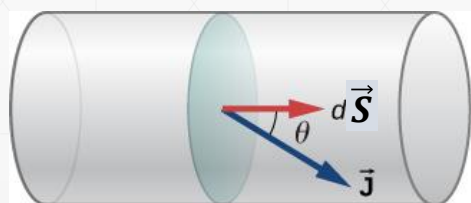
- natężenie prądu jest skalarem, jednostka 1 amper = 1 A = 1 C/s

kierunek przepływu prądu oznaczamy strzałką (kierunek ruchu ładunków dodatnich)

- gęstość prądu to natężenie prądu na jednostkę powierzchni przekroju poprzecznego przewodnika

$$j = I/S \quad [\text{A/m}^2]$$

- gęstość prądu jest wektorem o kierunku i zwrocie zgodnym z wektorem prędkości ładunków dodatnich

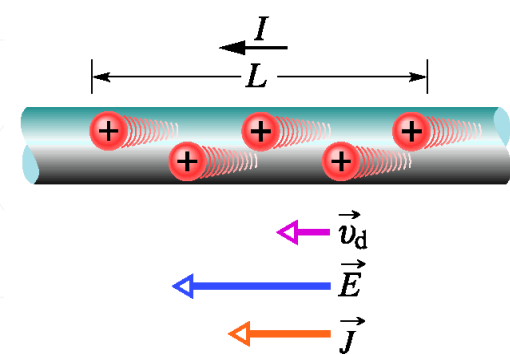


$$I = \vec{j} \cdot \vec{S}$$

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

linie prądu odzwierciedlają gęstość prądu

Prędkość unoszenia



- gdy przez przewodnik płynie prąd elektryczny to elektrony przemieszczają się z prędkością unoszenia (dryftu) \vec{v}_d $v_d = 10^{-5} \text{ m/s}$

$$\vec{v}_d = L/t$$

$$Q = (nSL)e$$

- jeżeli koncentracja nośników wynosi n i wszystkie nośniki przepłyną przez przewodnik o długości L w czasie t to

$$I = Q/t = neSL/t = neSv_d \quad \text{a w postaci wektorowej} \quad \vec{j} = ne\vec{v}_d$$

- wprowadzając pojęcie ruchliwości nośników

$$\mu = \frac{v_d}{E}$$

$$\text{otrzymujemy} \quad \vec{j} = en\vec{v}_d = en\mu\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

- jest to tzw. **mikroskopowa postać prawa Ohma**: gęstość prądu jest wprost proporcjonalna do natężenia pola E

$$\sigma = en\mu \quad \text{- przewodność właściwa [S] - simens}$$

Prawo Ohma

- korzystając ze związku napięcia z polem elektrycznym i definicji gęstości prądu otrzymujemy

$$\left. \begin{array}{l} E = U/L \\ j = I/S \end{array} \right\} \vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{L} \quad \frac{U}{I} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} = R$$

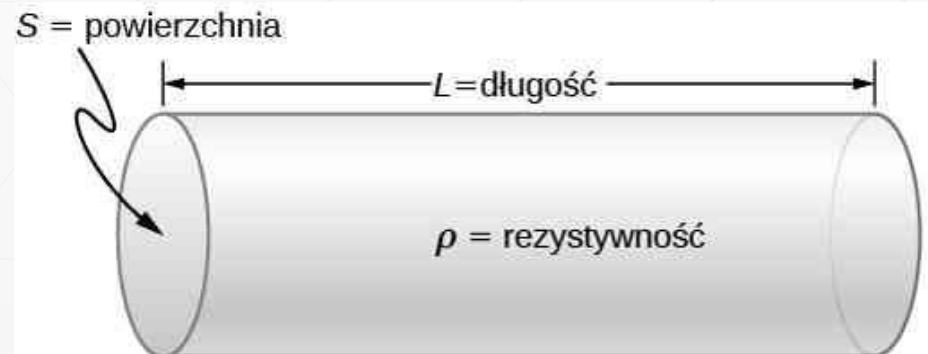
- **Prawo Ohma**: stosunek $R = U/I$ nie zależy od natężenia prądu I dla metali przy stałej temperaturze (jedn. R to 1 om $[\Omega] = [V/A]$)

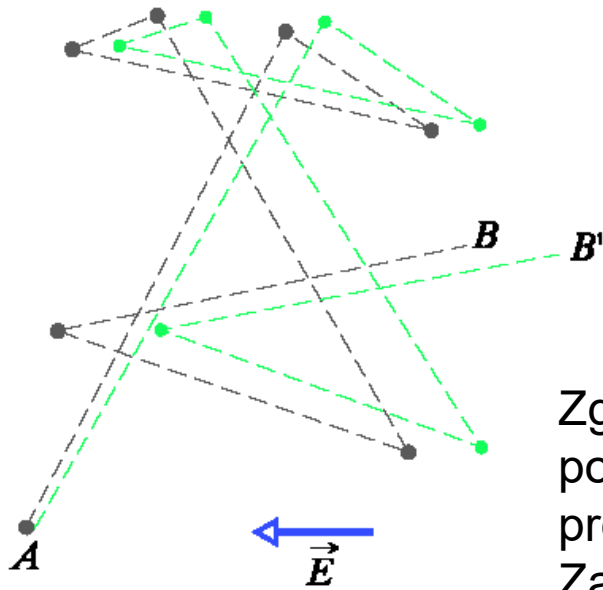
$I = U/R$ (natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia)

- R - rezystancja jest wprost proporcjonalna do długości przewodnika i odwrotnie proporcjonalna do powierzchni przekroju poprzecznego

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

gdzie $\rho = \frac{1}{\sigma}$ - rezystywność $[\Omega m]$
(opór elektryczny właściwy)





Mikroskopowy obraz prawa Ohma

Zgodnie z teorią kwantową elektrony swobodne w metalu poruszają się ze stałą, niezależną od temperatury prędkością $v_t = 10^6 \text{ m/s}$
 Zakładamy, że zderzają się tylko z atomami metalu

L – średnia droga swobodna (jaką przebywa elektron pomiędzy kolejnymi zderzeniami)
 τ – średni czas swobodny (średni czas pomiędzy zderzeniami - czas relaksacji)

Jeśli na elektron działa pole elektryczne to doznaje on przyspieszenia a oraz uzyskuje średnio prędkość unoszenia $v_d = a \cdot \tau \approx 10^{-5} \text{ m/s} \ll v_t$

$$a = \frac{F}{m^*} = \frac{eE}{m^*}$$

$$v_d = \frac{eE\tau}{m^*} = \mu E$$

Ponieważ

$$j = nev_d = \sigma E$$

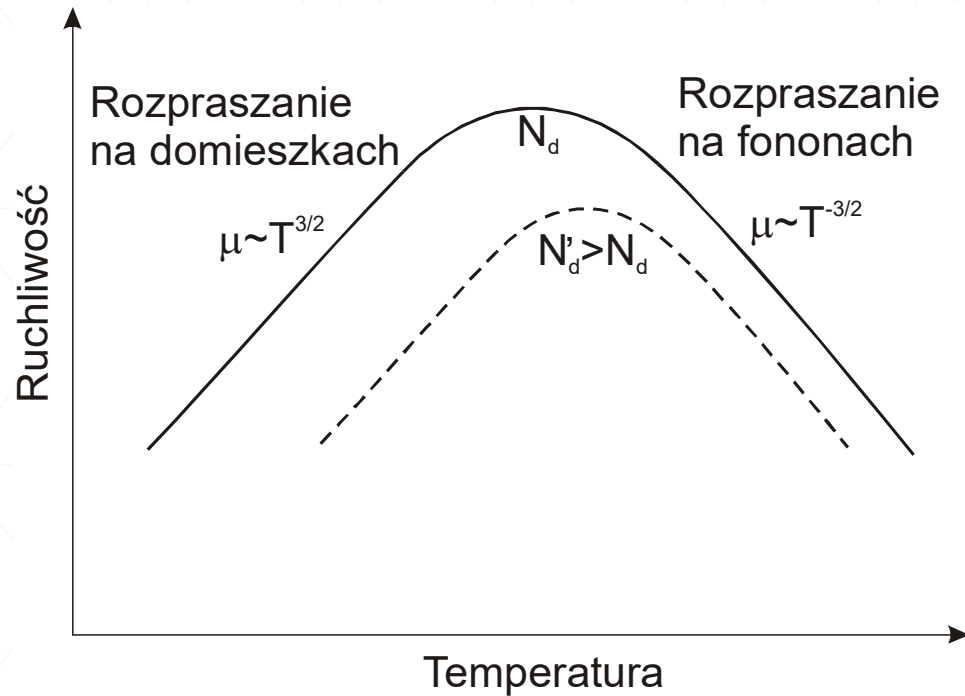
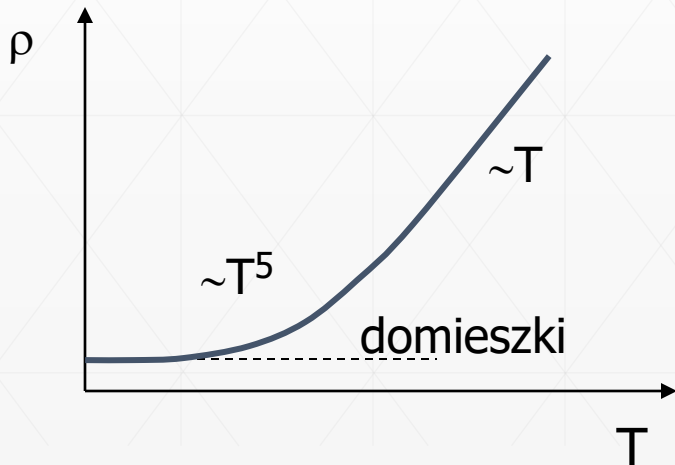
$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{e^2 E n \tau}{m^* E} = \frac{e^2 n \tau}{m^*} = en\mu$$

Wszystkie wielkości nie zależą od E , więc prawo Ohma jest spełnione

Ruchliwość nośników

- ruchliwość nośników to średnia prędkość unoszenia (dryftu) przy jednostkowym natężeniu zewnętrznego pola elektrycznego
- ustalona wartość ruchliwości jest wynikiem zderzeń nośników z fononami (drganiami sieci) i domieszkami sieci

$$\mu = \frac{v_d}{E} = \frac{e\tau}{m^*}$$



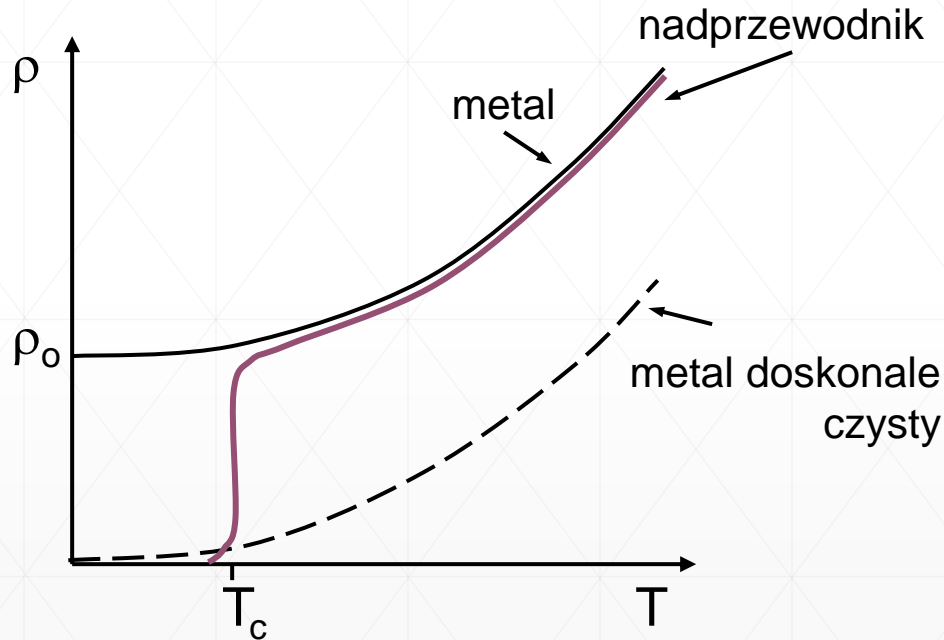
Centrami rozproszeniowymi są niejednorodności sieci: stacjonarne (defekty), dynamiczne (fonony)

W wysokich temperaturach jest to rozpraszanie na fononach, a w niskich na domieszkach

Ze wzrostem koncentracji ruchliwość maleje

T=300K	Si	InSb	Cu
μ_h (m ² /Vs)	0,060	0,075	-
μ_e (m ² /Vs)	0,150	7,700	0,34

Nadprzewodnictwo – zanik oporu elektrycznego



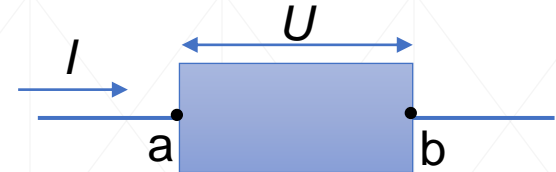
W metalach nadprzewodzących opór zmniejsza się praktycznie do zera poniżej pewnej temperatury krytycznej T_c mimo obecności domieszek

Temperatura krytyczna T_c jest zależna od rodzaju substancji:

Zn	0,85K	V ₃ Ga	16,5K
Hg	4,0K	Nb ₃ Sn	18,05K
Pb	7,19K	NbAlGe	20,7K
Nb	9,34K	BaYCuO	95K

Metodą pomiaru bardzo małych oporów jest pomiar zaniku prądu płynącego w pętli. Opór zmniejsza się przy przejściu do stanu nadprzewodzącego o ponad 14 rzędów.

Praca i moc prądu



Jeżeli między zaciskami a i b opornika R płynie prąd I to ilość ładunku przeniesiona między tymi zaciskami w przedziale czasu dt wynosi $I dt$. Ruchowi ładunku dq towarzyszy spadek potencjału o wartość U i stąd spadek energii potencjalnej równej pracy dW

- $dE_p = dW = U dq = UI dt$

$$U = V_a - V_b$$

Moc P równa ilości energii przekazanej ze źródła do rozważanego elementu w jednostce czasu wynosi

- $P = \frac{dW}{dt} = UI$

- Korzystając z prawa Ohma

- $P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2$

- Moc wydziela się w postaci ciepła Joule'a – elektryczna energia potencjalna zamienia się na energię wewnętrzną (termiczną)

[analogia do ruchu kamienia spadającego ze stałą prędkością w wodzie]

Przy każdym zderzeniu elektronu z atomem traci on nadwyżkę energii, którą uzyskał od pola elektrycznego, co prowadzi do wzrostu temperatury opornika

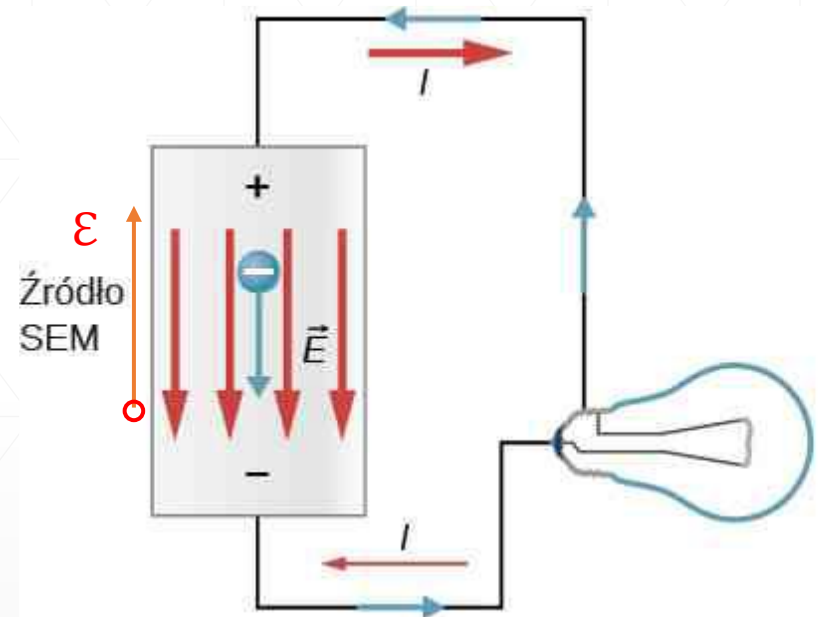
Siła elektromotoryczna SEM

Źródło siły elektromotorycznej wykonuje pracę nad nośnikami ładunku utrzymując różnicę potencjałów między zaciskami (biegunami)

Źródła siły elektromotorycznej:

- ogniwo elektryczne (bateria)
- prądnica elektryczna (SEM indukcji)
- ogniwa słoneczne
- ogniwa paliwowe (np. wodorowe)
- termoogniwa

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \quad [V] - \text{volt}$$

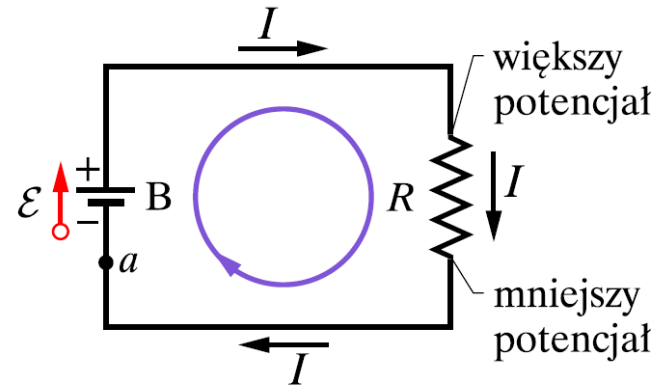


ozn. SEM, U_0 , ε

Siła elektromotoryczna źródła SEM jest pracą przypadającą na jednostkę ładunku, jaką wykonuje źródło, przenosząc ładunek z bieguna o mniejszym potencjale, do bieguna o większym potencjale

Metoda energetyczna obliczania prądu

- Obwód o jednym oczku, w którym opornik o oporze R jest połączony ze źródłem B o SEM równej \mathcal{E}



- Praca wykonana przez baterię musi być równa energii termicznej wytworzonej w oporniku

$$dW = Pdt$$

$$dW = \mathcal{E}dq = \mathcal{E}Idt$$

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt$$

$$\mathcal{E} = IR$$

$$Pdt = I^2Rdt$$

- Reguła oporu:** gdy przemieszczamy się wzdłuż opornika w kierunku przepływu prądu zmiana potencjału wynosi $-IR$
- Reguła SEM:** w źródle SEM zmiana potencjału wynosi $+$, gdy poruszamy się zgodnie z kierunkiem strzałki SEM (od $-$ do $+$)

$$\mathcal{E} - IR = 0$$

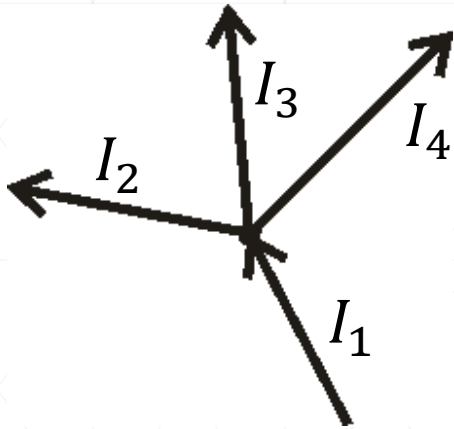
lub

$$-\mathcal{E} + IR = 0$$

gdy przeciwny ruch w oczku

Wynik jest jednakowy: $\mathcal{E} = IR$

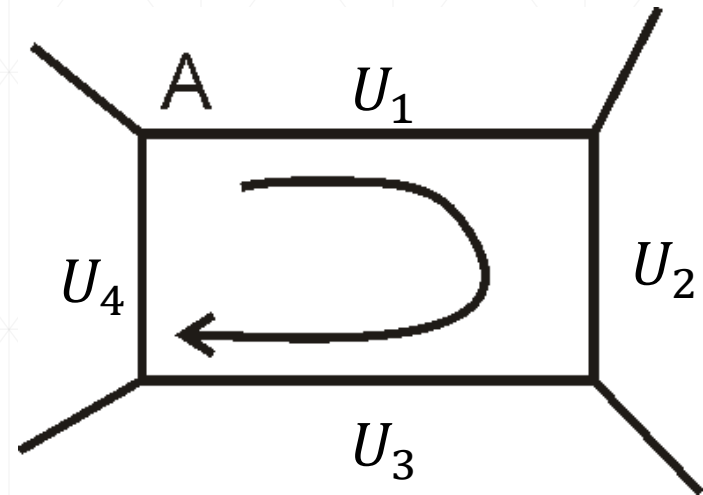
Prawa Kirchhoffa



Węzeł: Suma prądów wpływających i wypływających z węzła wynosi zero (zasada zachowania ładunku).

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4$$

Pierwsze prawo Kirchhoffa



Oczko: Poruszając się po zamkniętej pętli np. z punktu A do A dochodzimy do tego samego potencjału. Stąd suma napięć wynosi zero.

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0$$

Drugie prawo Kirchhoffa

Opór wewnętrzny

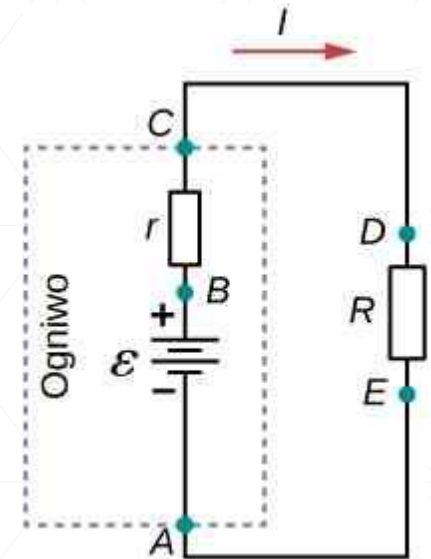
- Ogniwo składa się z siły elektromotorycznej \mathcal{E} i oporu wewnętrznego r
- Stosując drugie prawo Kirchhoffa dla obwodu w kierunku ruchu wskazówek zegara mamy:

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0$$

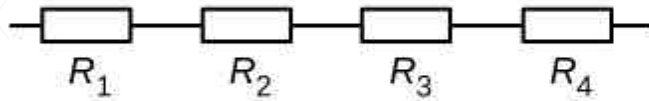
- Różnica potencjałów na biegunach baterii U_{bat} maleje wraz ze wzrostem czerpanego prądu

$$U_{bat} = \mathcal{E} - Ir$$

- Gdy bateria się wyczerpuje jej opór wewnętrzny r wzrasta
- Doskonałym źródłem SEM nazywamy ogniwo, które nie wykazuje żadnego oporu wewnętrznego



Łączenie oporników, rezystancja zastępcza

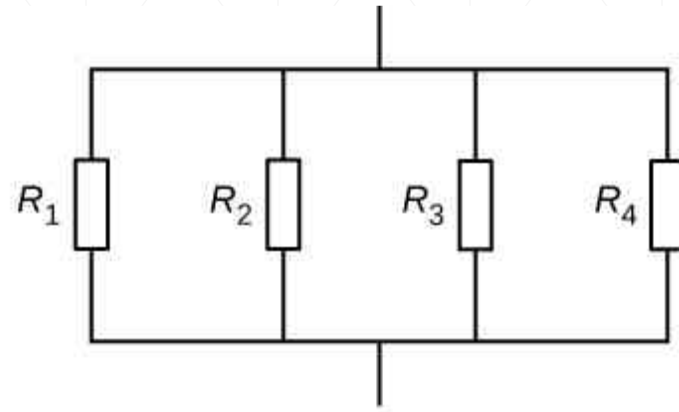


Połączenie szeregowe

$$\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 - IR_4 = 0$$

$$\mathcal{E} = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = IR$$

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$



Połączenie równoległe

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R_1} + \frac{\mathcal{E}}{R_2} + \frac{\mathcal{E}}{R_3} + \frac{\mathcal{E}}{R_4}$$

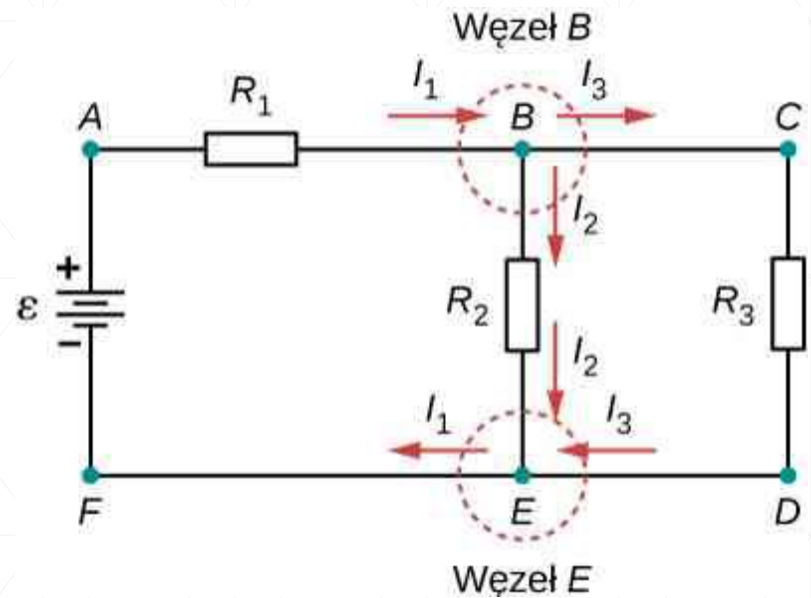
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Podłączając oporniki do doskonałego źródła SEM wyznaczamy wartość rezystancji opornika równoważnego

Obwody złożone

Z pierwszego prawa Kirchhoffa zarówno dla węzła B i E

$$I_1 = I_2 + I_3$$



Z drugiego prawa Kirchhoffa dla oczka

ABEF: $\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0$

BCDE: $I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$

Rozwiązując układ trzech równań otrzymujemy

$$I_1 = I_2 + \frac{R_2}{R_3} I_2$$

$$\mathcal{E} - I_2 R_1 - \frac{R_1 R_2}{R_3} I_2 - I_2 R_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{R_3 \mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_3 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3) \mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

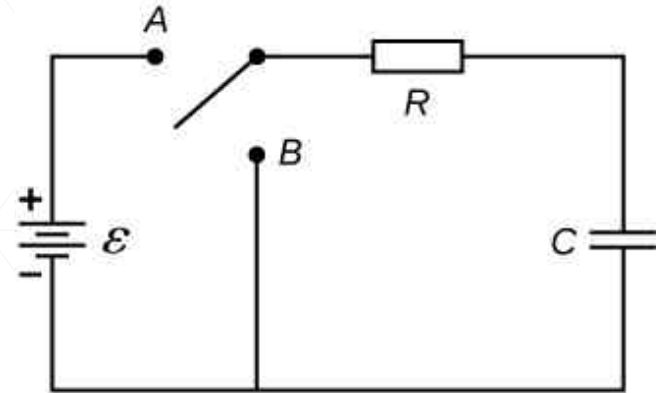
Obwody RC

Po ustawieniu przełącznika w punkcie A kondensator ładuje się przez opornik R

$$\varepsilon - U_R - U_C = 0 \rightarrow \varepsilon - IR - \frac{Q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/(RC)}$$



Rozwiązanie:

$$Q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-t/(RC)})$$

Ładowany kondensator zachowuje się początkowo jak zwykły przewodnik z opornikiem, a po upływie długiego czasu jak przerwa w obwodzie

Po ustawieniu przełącznika w punkcie B kondensator rozładowuje się przez opornik R

$$U_R + U_C = 0 \rightarrow R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

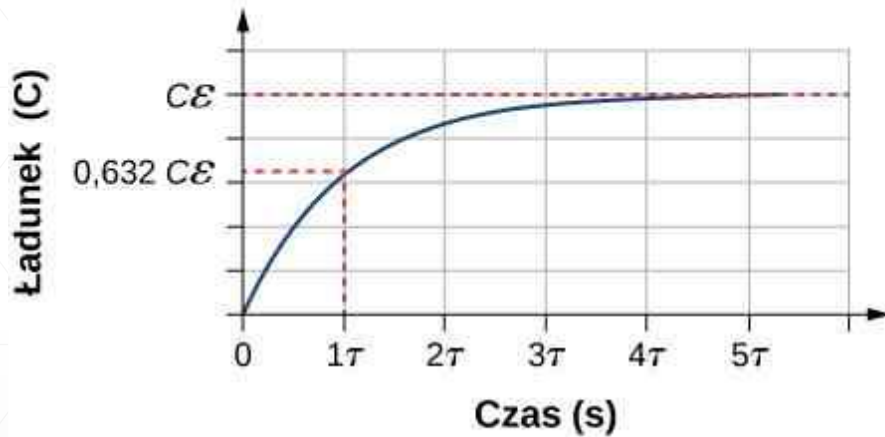
$$Q(t) = \varepsilon C e^{-t/(RC)} = Q_0 e^{-t/(RC)}$$

Ładunek wykładniczo maleje w czasie od wartości początkowej Q_0

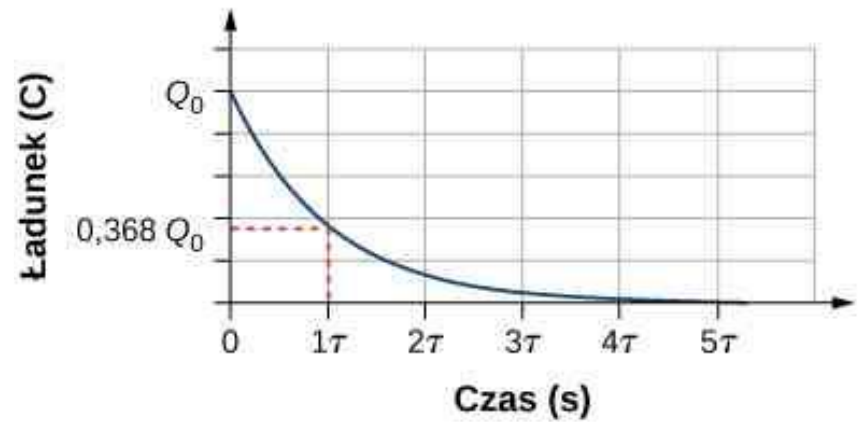
Pojemnościowa stała czasowa

Zmiana ładunku na kondensatorze w funkcji czasu przy:

ładowaniu



rozładowaniu



$$Q(t) = \varepsilon C (1 - e^{-t/(RC)})$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}$$

Iloczyn RC ma wymiar czasu i zwany jest pojemnościową stałą czasową obwodu

$$\tau = RC$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

τ jest to czas po którym ładunek na okładkach kondensatora zmniejszy się do $0,368 Q_0$

Podsumowanie

- prąd elektryczny to uporządkowany ruch ładunków pod wpływem pola elektrycznego z prędkością unoszenia \vec{v}_d
- natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia zgodnie z prawem Ohma $I = U/R$
- mikroskopowy obraz prawa Ohma – przewodność właściwa, rezystywność, ruchliwość nośników, czas relaksacji
- siła elektromotoryczna i opór wewnętrzny ogniwa
- znać prawa Kirchhoffa i potrafić zastosować do obwodów prądu stałego