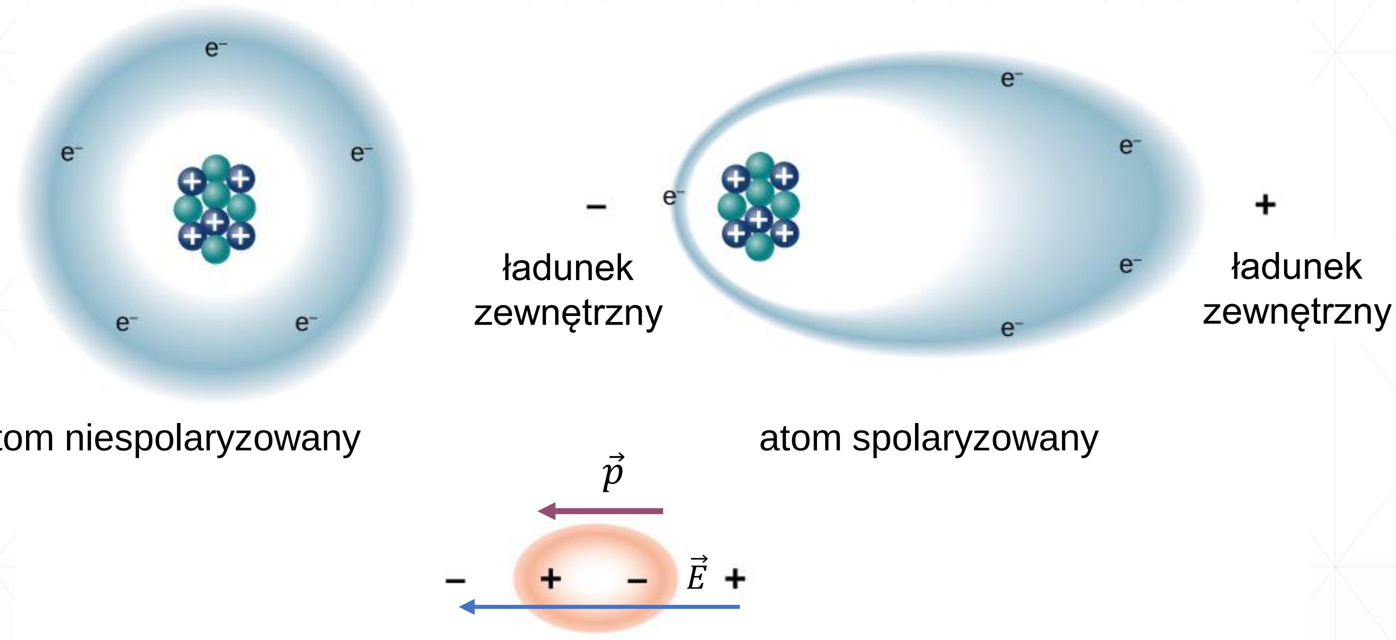
16. Pole elektryczne w ośrodku

- dielektryki i oddziaływanie pola elektrycznego z materią,
- prawo Gausa dla dielektryków,
- wektory opisujące pole elektryczne w materii,
- kondensatory.

Dielektryki

- Dielektryki to substancje, które nie zawierają swobodnych ładunków – nie są przewodnikami prądu elektrycznego
- wobec powyższego w dielektrykach może być wytworzone i utrzymywane bez strat energii pole elektryczne
- o własnościach elektrycznych dielektryka decydują ładunki związane (jony, elektrony), które pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego przesuwają się z położenia równowagi powodując polaryzację dielektryka
- polaryzacja dielektryka to indukcja ładunku na powierzchni dielektryka pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego

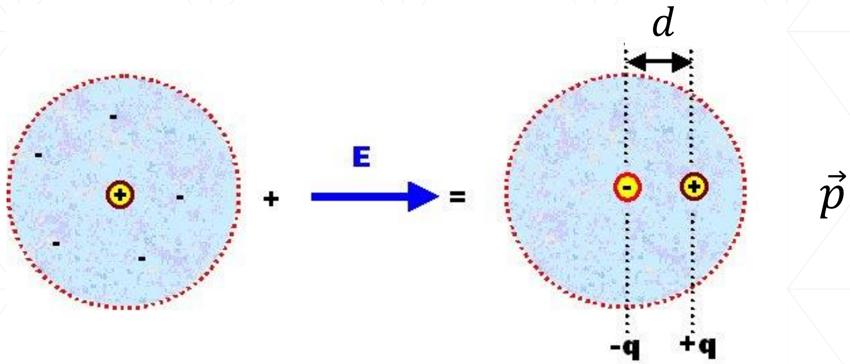
Molekularny model dielektryka



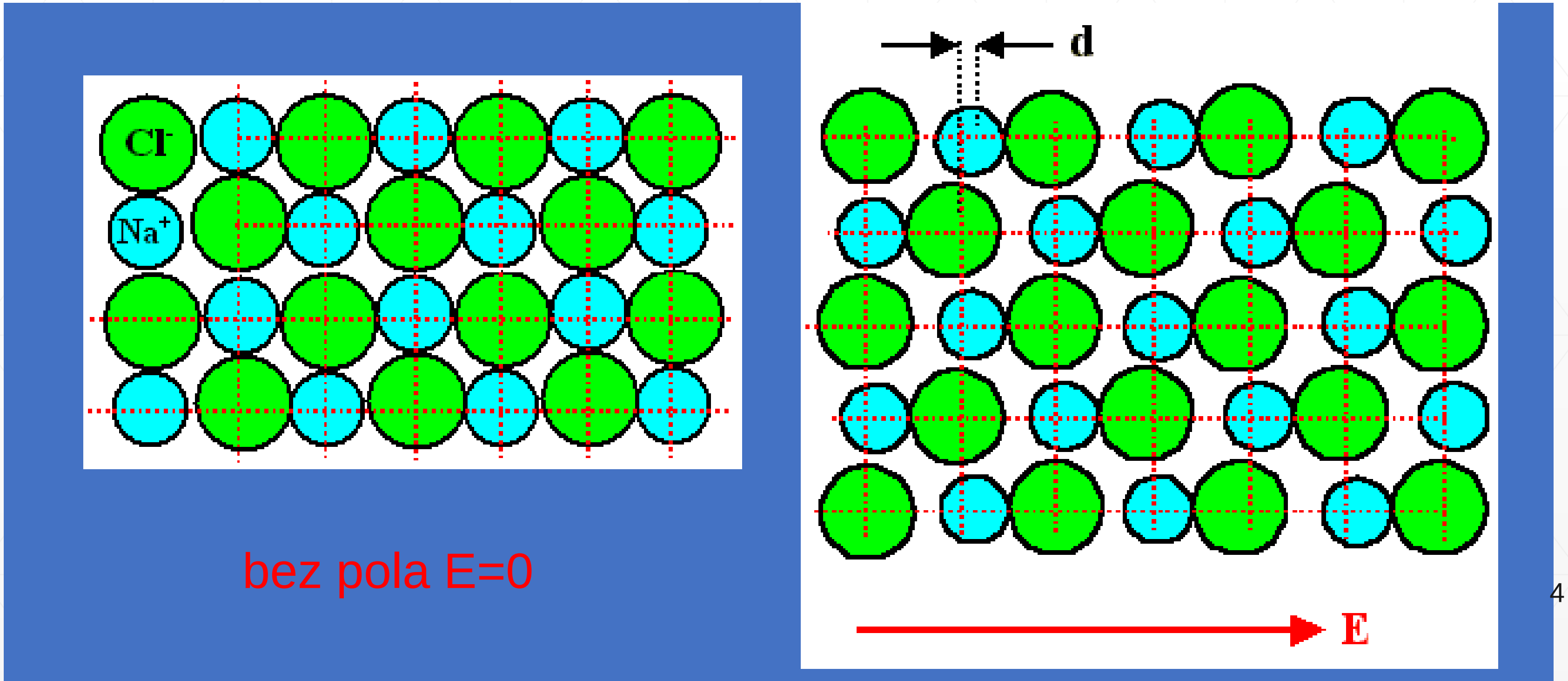
widok w dużej skali spolaryzowanego atomu

Pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego możliwa jest deformacja cząsteczek lub atomów (rozciągniecie) i (lub) ich obrót. Prowadzi to do zmiany momentów dipolowych cząsteczek, które z dobrym przybliżeniem możemy potraktować jak zbiór dipoli oddziałujących ze sobą i z zewnętrznym polem.

Dielektryki



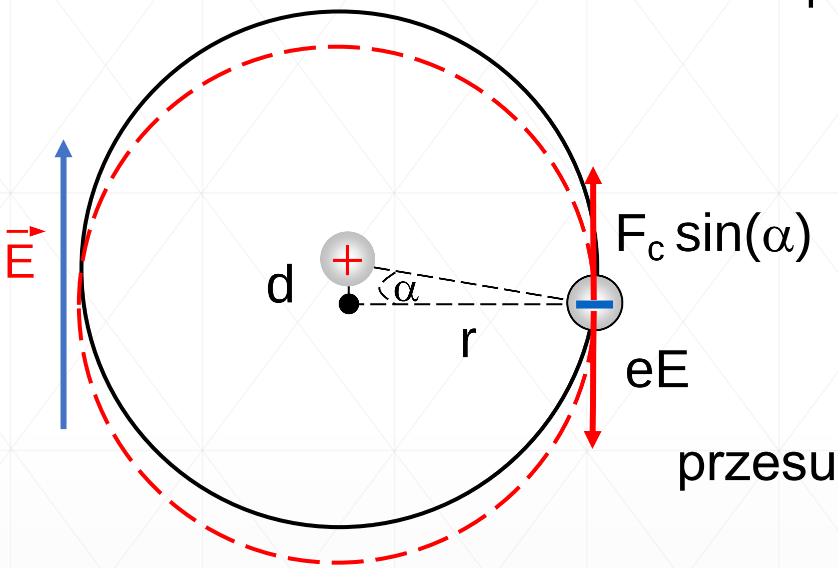
- dielektryki niepolarne – zbudowane z atomów i molekuł, które nie mają trwałych momentów dipolowych np. H_2
  - polaryzacja elektronowa
  - polaryzacja jonowa



Wektor polaryzacji $\vec{P}$

Rozpatrzmy atom wodoru w zewnętrznym polu elektrycznym E.

Pod wpływem tego pola orbita elektronu przesunie się do dołu. Wówczas na elektron w kierunku pola działa składowa F_c



$$F_c \cdot \sin(\alpha) = eE$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(r^2+d^2)} \cdot \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}} = eE$$

przesunięcie orbity $d << r$ czyli $\frac{e \cdot d}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E$

indukowany moment dipolowy - $p = e \cdot d = \underbrace{4\pi\varepsilon_0 r^3}_{\alpha} \cdot E$

współczynnik polaryzacji elektronowej → α

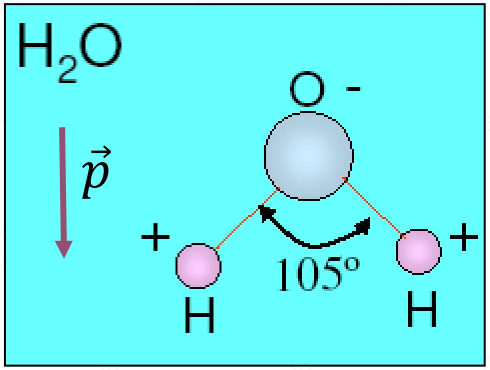
Wektor polaryzacji $\vec{P}$ - suma momentów dipolowych w jednostce objętości $\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\vec{E} = \chi\varepsilon_0\vec{E}$$

gdzie $\chi = n\alpha/\varepsilon_0$ – podatność elektryczna dielektryka

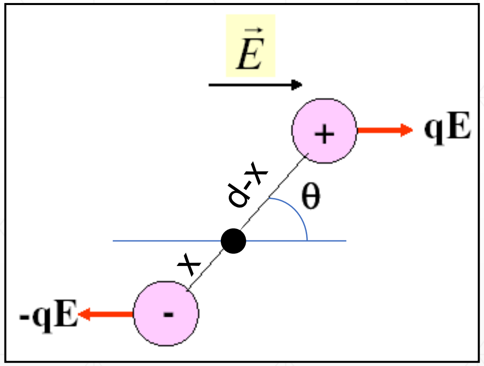
n – liczba cząstek (dipoli) w jedn. objętości

Dipol w polu elektrycznym



- W przyrodzie występują substancje które posiadają trwałe momenty dipolowe, np. cząsteczka wody
- na ładunki dipola umieszczonego w zewnętrznym polu elektrycznym działają równe siły, ale przeciwnie skierowane, tak że nie ma siły wypadkowej działającej na dipol (dipol nie przesuwa się)
- działa jednak moment sił obracający dipolem względem środka masy (środek masy leży w odległości x od jednego końca dipola)

$$p = qd$$



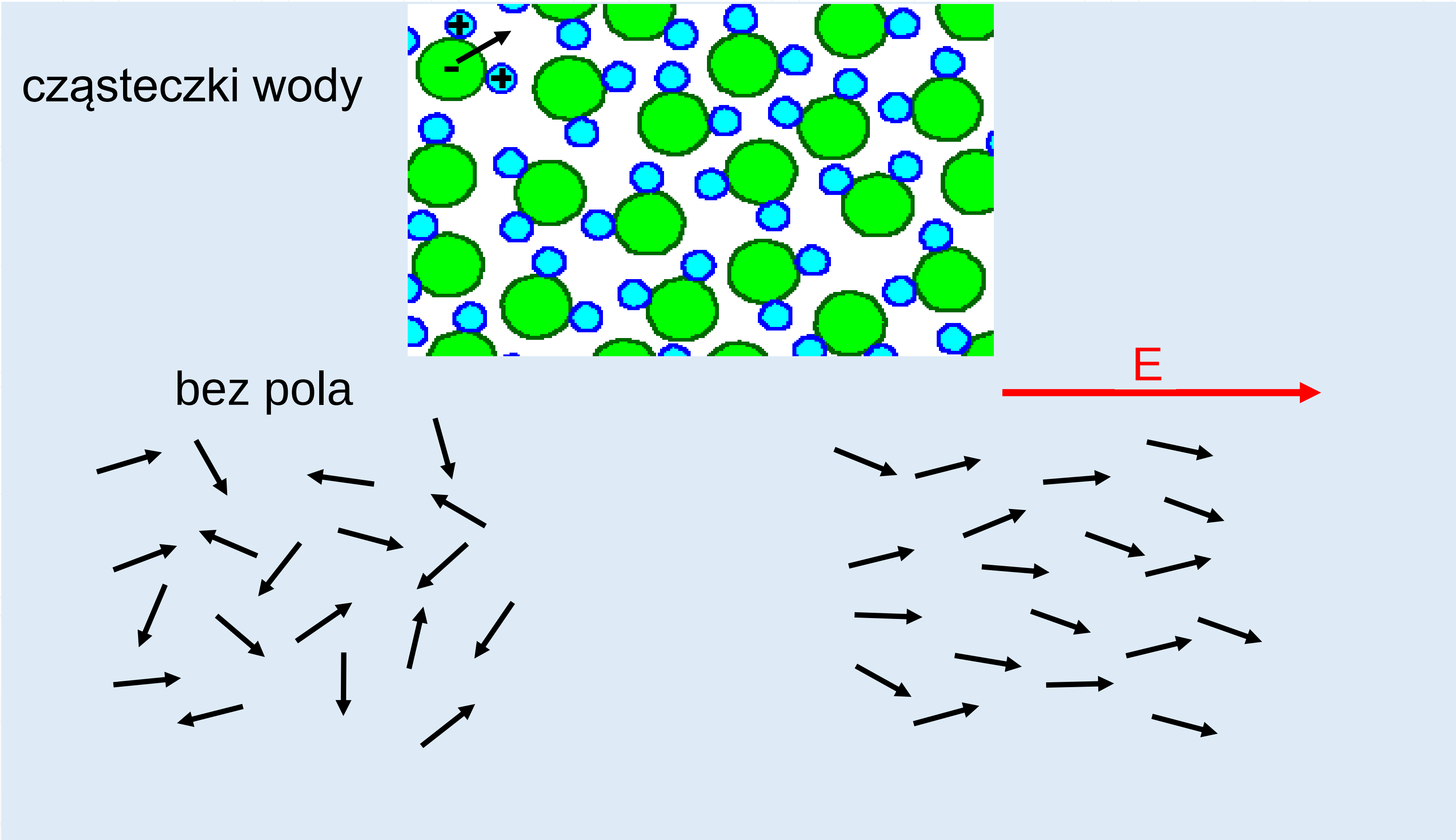
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = qExsin\theta + qE(d - x)sin\theta = Eqdsin\theta$$

$$M = pEsin\theta$$ w zapisie wektorowym $$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

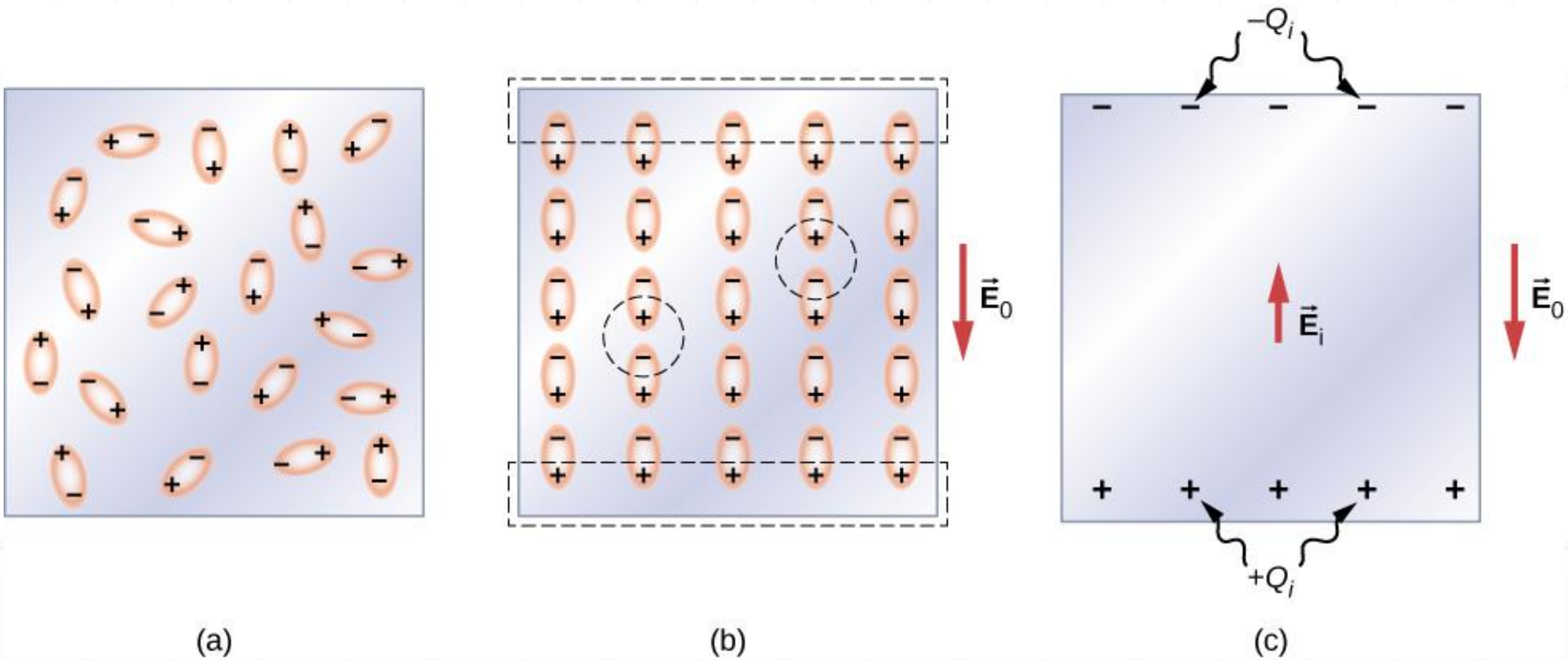
Moment siły dąży do obrócenia momentu dipolowego $\vec{p}$ (a stąd i dipola) w kierunku natężenia pola *E*, czyli zmniejszenia kąta θ

Dielektryki



- dielektryki polarne – cząsteczki o samoistnym, trwałym momencie dipolowym H_2O - polaryzacja skierowana

Osłabienie pola zewnętrznego

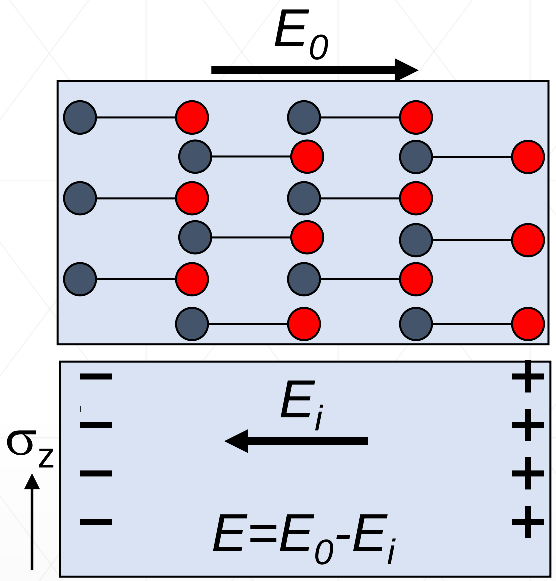


Pole ulega osłabieniu $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$ $|\vec{E}| = E_0 - E_i$

$\vec{E}_0$ pole zewnętrzne $\vec{E}_i$ pole indukowane

Pole elektryczne w dielektrykach

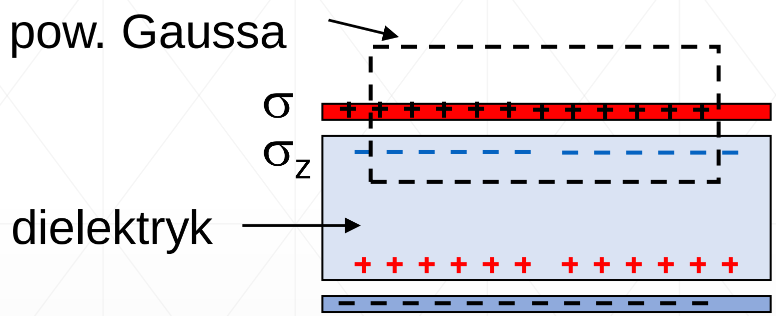
Dielektryk umieszczony w zewnętrznym polu elektrycznym E_0



dielektryk ulega polaryzacji
na powierzchni indukują się
ładunki związane o gęstości σ_z

zamiast mówić o ładunkach związanych wprowadzamy wektor polaryzacji $\vec{P}$, którego składowa normalna jest równa gęstości ładunków związanych $P_n = \sigma_z$

Korzystając z prawa Gaussa dla prostopadłościanu o powierzchni ΔS



$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{(\sigma-\sigma_z)\cdot\Delta S}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma-P_n)\Delta S}{\varepsilon_0}$$

Pole elektryczne w dielektrykach

Dielektryk umieszczony w zewnętrznym polu elektrycznym E_0

$$\int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = (\sigma - P_n)\Delta S$$

ale

$$\vec{P} d\vec{S} = P cos\alpha\, dS = P_n dS$$

$$\int_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} + P_n \Delta S = \sigma \Delta S \Longrightarrow \int_S \left(\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}\right) d\vec{S} = \sigma \Delta S = Q$$

Wprowadzając pojęcie wektora indukcji elektrycznej $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}$

$$\int_S \left(\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}\right) d\vec{S} = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \varepsilon_o \chi \vec{E} = \varepsilon_o \underbrace{(1 + \chi)}_{\varepsilon_r = 1 + \chi} \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E}$$

Indukcja elektryczna $\vec{D}$ jest wielkością wektorową opisującą natężenie pola elektrycznego wewnątrz ciał nieprzewodzących (np. dielektryków)

ε_r - względna przenikalność elektryczna ośrodka

Prawo Gaussa w dielektrykach

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E}$$

Strumień wektora indukcji przez dowolną powierzchnię zamkniętą równy jest ładunkowi swobodnemu zawartemu w obszarze ograniczonym rozpatrywaną powierzchnią

$$\oint_S \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o \varepsilon_r} Q$$

informacja o dielektryku zawarta jest we względnej przenikalności elektrycznej ε_r

Materiał	$\boldsymbol{\varepsilon_r}$
Papier	3,5
Mika	5,4
Krzem	12
Woda	80,4

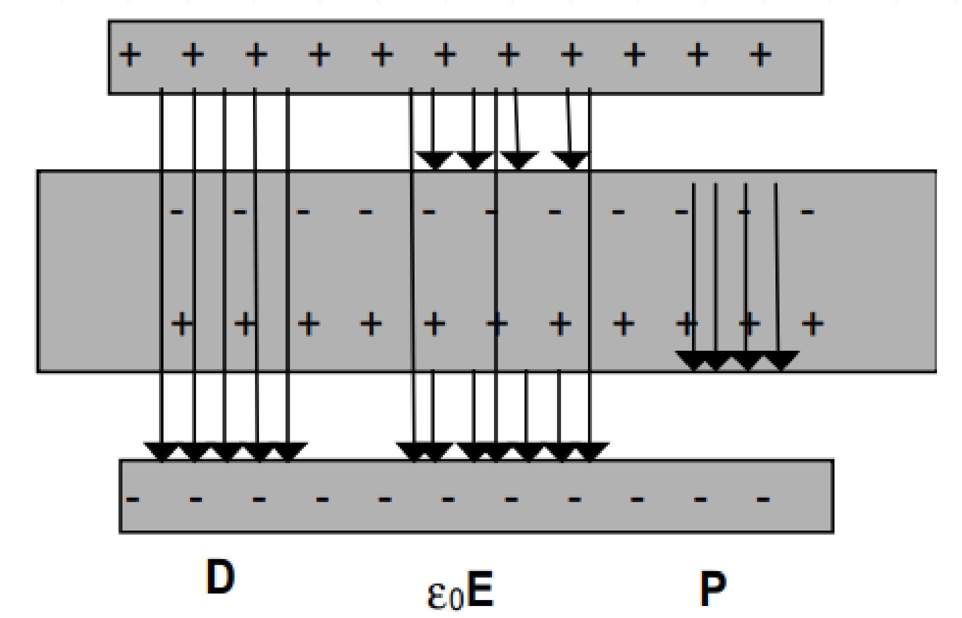
Dla próżni $\varepsilon_r = 1$

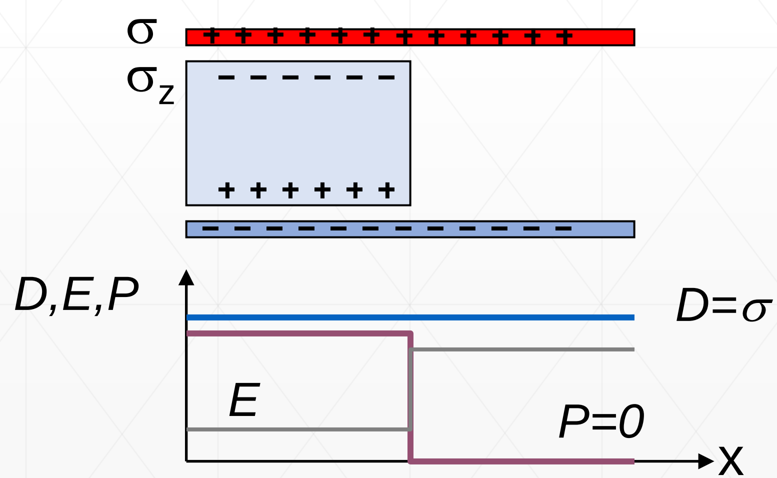
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} Q$$

Wnioski

- wektor indukcji $\vec{D}$ ma taką samą postać w próżni i w dielektryku
- natężenie pola $\vec{E}$ jest ε_r razy mniejsze w dielektryku i jest uwarunkowane ładunkiem swobodnym i związanym
- wektor polaryzacji $\vec{P}$ jest spowodowany ładunkiem związanym (w próżni $\vec{P}$ =0)

$$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}$$





Zmiany indukcji, natężenia pola i polaryzacji na granicy dielektryka

Dielektryki

- W obszarze wypełnionym całkowicie materiałem dielektrycznym o względnej przenikalności elektrycznej ε_r wszystkie równania elektrostatyki, zawierające przenikalność elektryczna w próżni ε_0 należy zmodyfikować, zastępując ε_0 przez $\varepsilon_0\varepsilon_r$

- Np. prawo Coulomba

$$F = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

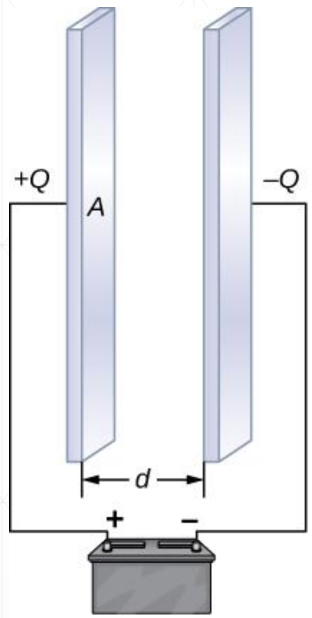
- Wyrażenia na natężenie pola elektrostatycznego od ładunku punktowego lub naładowanej powierzchni otoczonych dielektrykiem

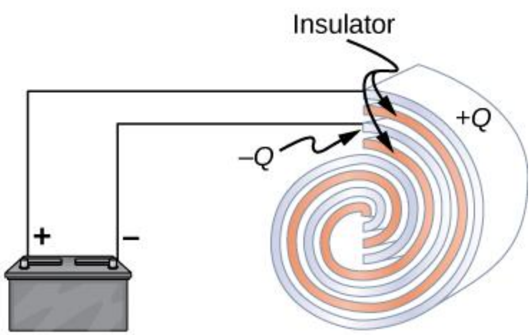
$$E = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}$$

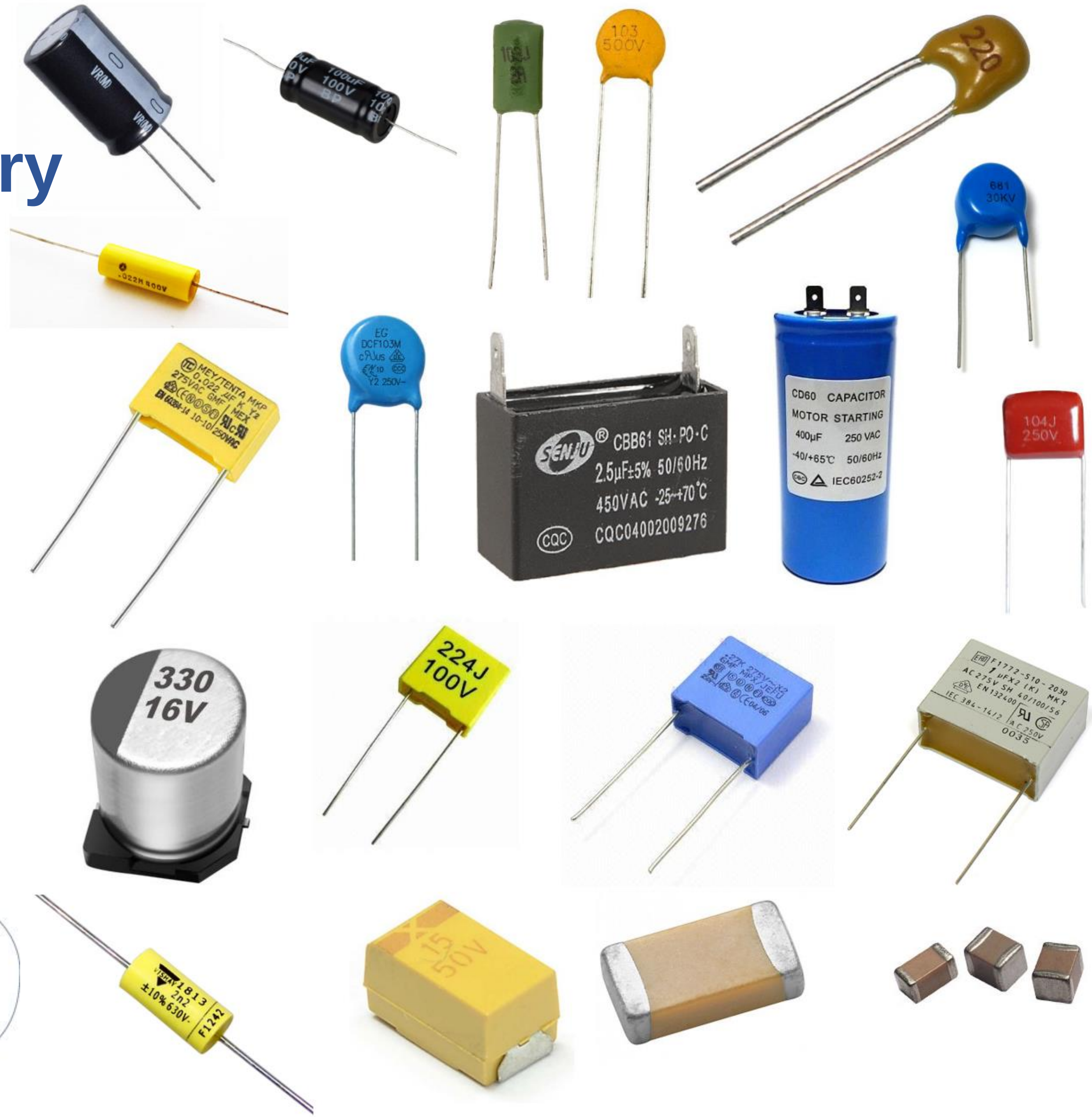
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o\varepsilon_r}$$

- Równania te pokazują, że dla ustalonego rozkładu ładunków wpływ dielektryka polega na osłabieniu natężenia pola elektrycznego w stosunku do sytuacji bez dielektryka.

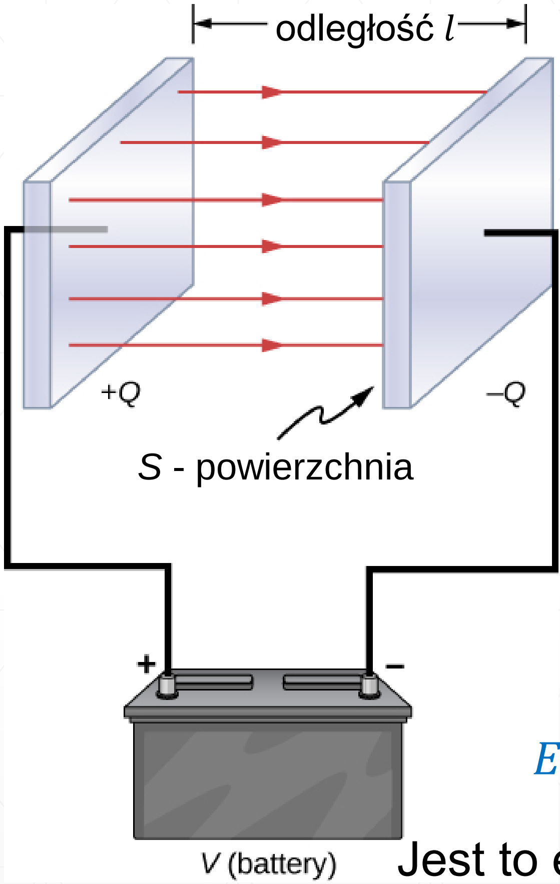
Kondensatory







Kondensator płaski



Napięcie pomiędzy okładkami kondensatora wynosi

$$U = \Delta V = El = \frac{Ql}{\varepsilon_0 S}$$

Pojemność kondensatora definiujemy jako

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{S}{l} \quad \text{lub} \quad C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{l}$$

Aby naładować kondensator do napięcia U bateria musi wykonać pracę przeciwko siłom pola wytworzonego przez ładunek zgromadzony na okładkach.

$$C = \frac{dQ}{dU}$$

$$dW = dE_p = UdQ = CUdU$$

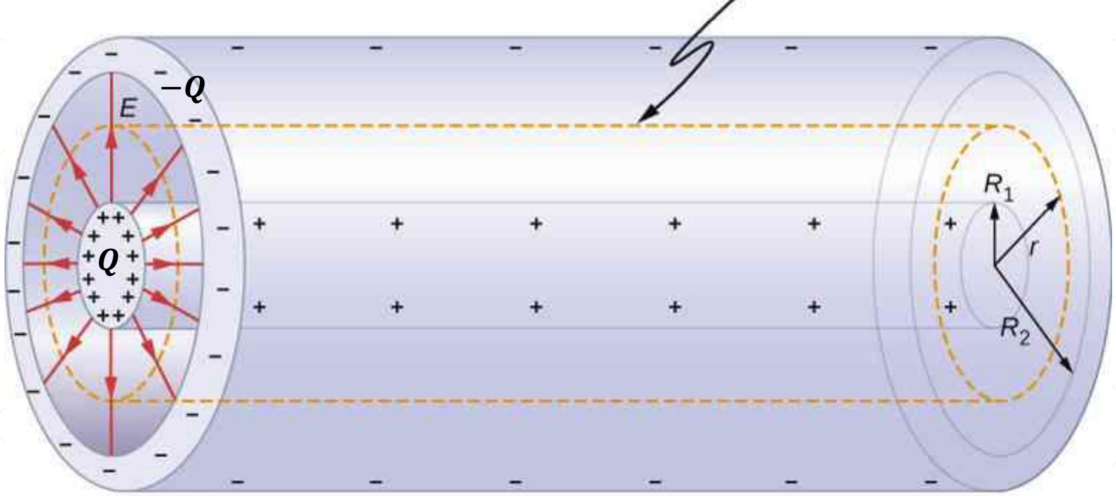
$$E_p = W = \int_0^W dW = \int_0^U CUdU = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 lS$$

Jest to energia zgromadzona w płaskim próżniowym kondensatorze

Gęstość energii pola elektrycznego u w kondensatorze jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola elektrycznego:

$$u = \frac{E_p}{V} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 lS}{lS} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$

Kondensator walcowy



Kondensator walcowy o długości L zbudowany z dwóch współosiowych powierzchni walcowych o promieniach R_1 i R_2. Każda z okładek zawiera ładunek o wartości Q.
Z prawa Gaussa dla powierzchni bocznej walca wyznaczmy E

$$ES = E2\pi rL = {}^{Q}/_{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 Lr}$$

Ze związku pomiędzy natężeniem a potencjałem szukamy różnicy potencjałów (napięcia) miedzy okładkami

$$U = -\int_{R_2}^{R_1} E dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r}dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

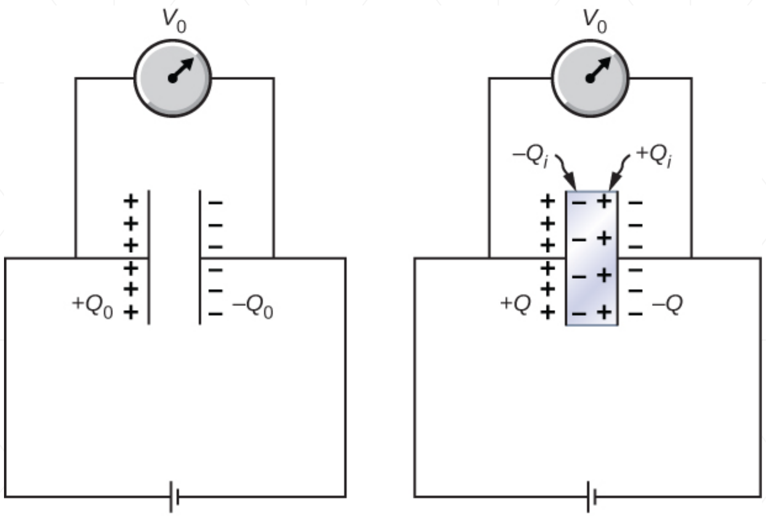
Pojemność kondensatora wyznaczmy z definicji

$$C = \frac{Q}{U} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{ln(R_2/R_1)}$$

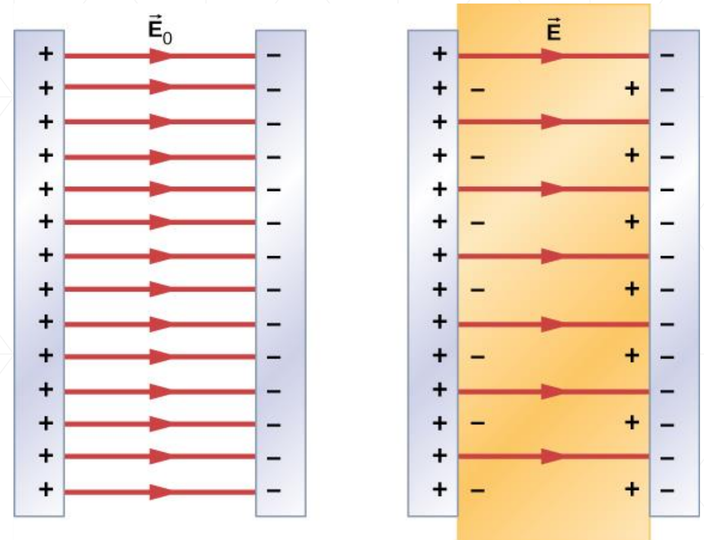
Pojemność kondensatora walcowego zależy od wielkości geometrycznych: L, R_1 i R_2

Kondensator z dielektrykiem

a)



b)

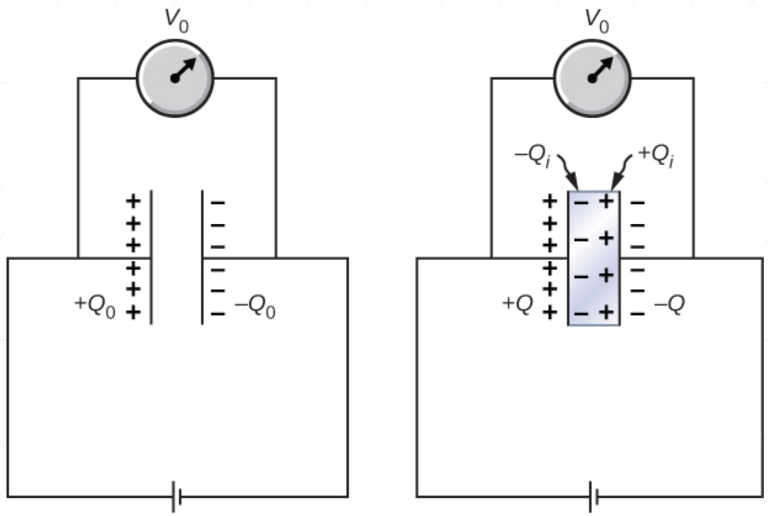


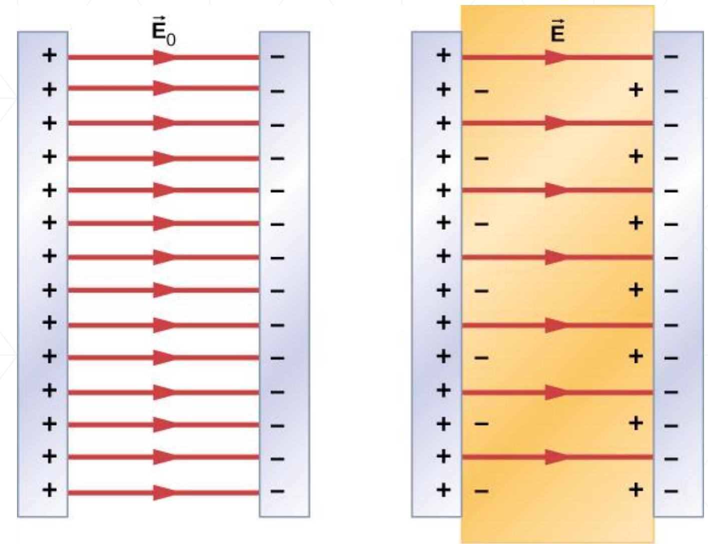
Warstwa dielektryka o przenikalności ε_r zostanie wsunięta pomiędzy okładki kondensatora. Jak zmieni się energia pola elektrycznego jeśli kondensator płaski jest podłączony do baterii (a) i jeśli nie jest (b). Skąd bierze się różnica energii.

W obu przypadkach pojemność kondensatora wzrasta ε_r razy $C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{l} = \varepsilon_r C_0$

W przypadku (a) gdy kondensator jest podłączony do baterii zwiększa się ładunek zgromadzony na okładkach, a napięcie pozostaje stałe. Energia pola elektrycznego wzrośnie ε_r razy, gdyż $E_p = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C_0 U^2 = \varepsilon_r E_{p0}$. Bateria wykonuje pracę związaną z doprowadzeniem dodatkowego ładunku na okładki kondensatora.

Kondensator z dielektrykiem

a) 

b) 

Warstwa dielektryka o przenikalności ε_r zostanie wsunięta pomiędzy okładki kondensatora. Jak zmieni się energia pola elektrycznego jeśli kondensator płaski jest podłączony do baterii (a) i jeśli nie jest (b). Skąd bierze się różnica energii.

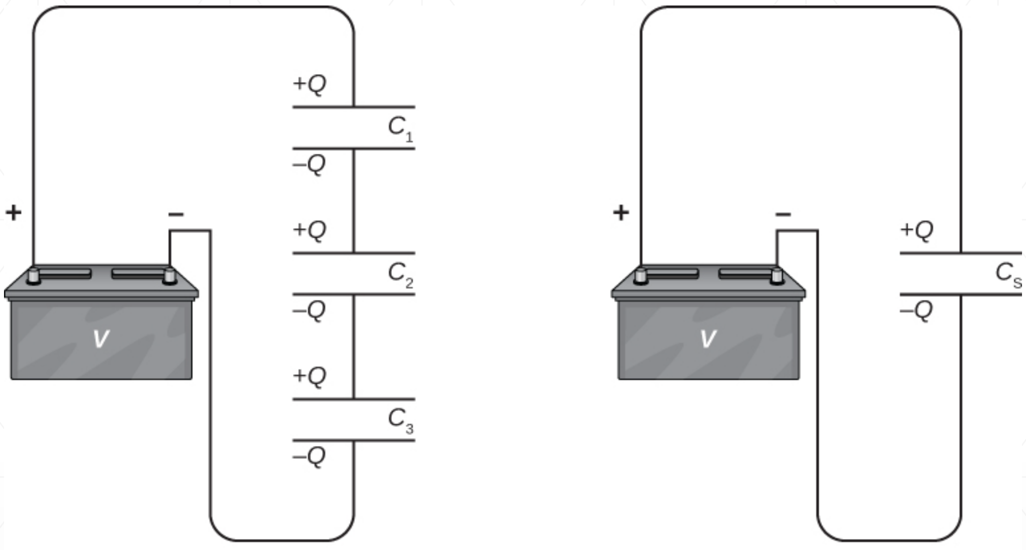
W obu przypadkach pojemność kondensatora wzrasta ε_r razy $C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{l} = \varepsilon_r C_0$

W przypadku (b) gdy kondensator nie jest podłączony do baterii ładunek zgromadzony na okładkach pozostaje stały, a maleje różnica potencjałów na okładkach. Energia pola elektrycznego zmaleje ε_r razy, gdyż $E_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_r C_0} = \frac{1}{\varepsilon_r} E_{p0}$ układ wykonuje pracę kosztem energii pola, którego natężenie również maleje ε_r razy.

W obu przypadkach dielektryk jest wciągany do kondensatora.

Łączenie kondensatorów

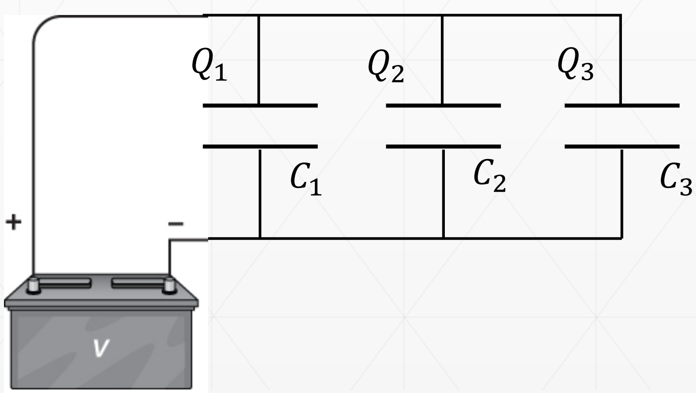
Kondensatory połączone szeregowo: $U_1 = \frac{Q}{C_1}; \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}; \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}$



$$U_s = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\frac{1}{C_S} = \frac{U_s}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

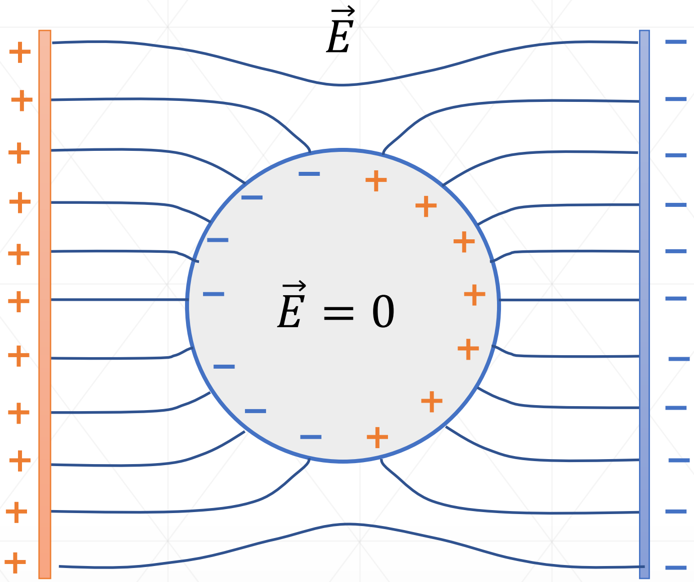
Kondensatory połączone równolegle: $Q_1 = C_1 U; \quad Q_2 = C_2 U; \quad Q_3 = C_3 U;$

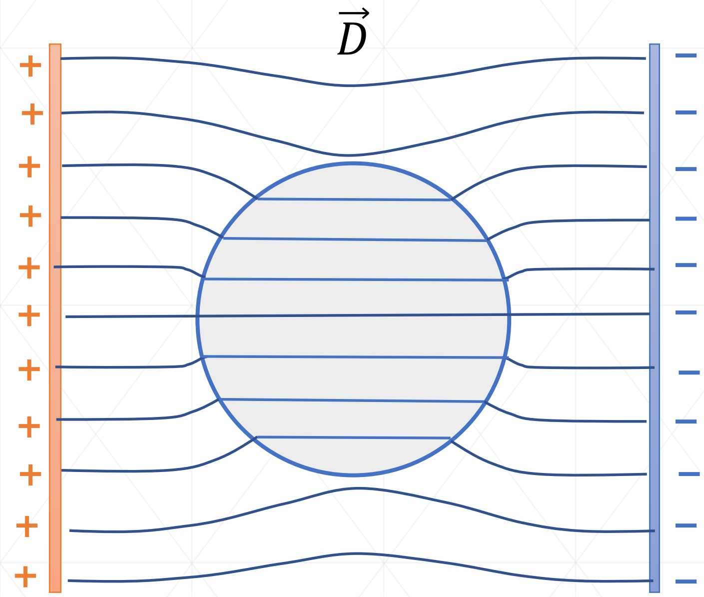


$$Q_R = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$C_R = \frac{Q_R}{U} = C_1 + C_2 + C_3;$$

Metal i dielektryk w polu elektrycznym





Nienaładowany przewodnik w zewnętrznym polu elektrycznym. Swobodne elektrony rozkładają się na jego powierzchni tak, że E = 0 wewnątrz przewodnika i wypadkowe pole na powierzchni jest prostopadłe do niej

Kula z dielektryka w zewnętrznym polu elektrycznym. Widać zachowanie ciągłości linii indukcji D i zmianę gęstości ich rozmieszczenia.

$$D = \varepsilon_o \varepsilon_r \mathrm{E}$$

Podsumowanie

- Dielektryki polarne i niepolarne
- Wektor polaryzacji $\vec{P}$ – suma momentów dipolowych w jednostce objętości
- Wektor indukcji elektrycznej $\vec{D} = \varepsilon_o \varepsilon_r \vec{E}$
- Względna przenikalność elektryczna ośrodka ε_r
- Prawo Gaussa dla dielektryków $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$
- Kondensatory z dielektrykiem