15. Pole elektryczne w próżni

- prawo Coulomba,
- natężenie pola elektrycznego,
- źródła pola elektrycznego: ładunki, dipole, kwadrupole,
- prawo Gaussa,
- potencjał elektryczny,
- pojemność elektryczna,
- energia pola elektrycznego.

Podstawowe pojęcia elektrostatyki

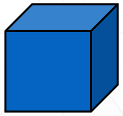
- elektrostatyka - zagadnienia związane z oddziaływaniem ładunków elektrycznych w spoczynku
- siły elektrostatyczne wywołane są ładunkiem elektrycznym
- ładunek elementarny e = $1{,}60 \times 10^{-19}$ C
- ładunek elektronu = - e; ładunek protonu = + e
- każdy ładunek może być tylko wielokrotnością powyższych ładunków elementarnych – ładunek jest skwantowany
- ładunek punktowy, liniowy, powierzchniowy i objętościowy
- gdy ładunek jest rozłożony niejednorodnie to
- w układzie zamkniętym całkowity ładunek pozostaje stały

q

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

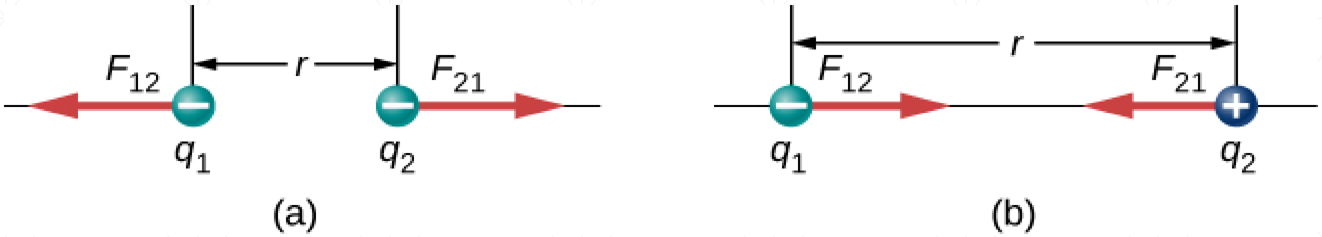
$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$\rho = \frac{q}{V}$$



$$q = \int \sigma dS$$

Prawo Coulomba

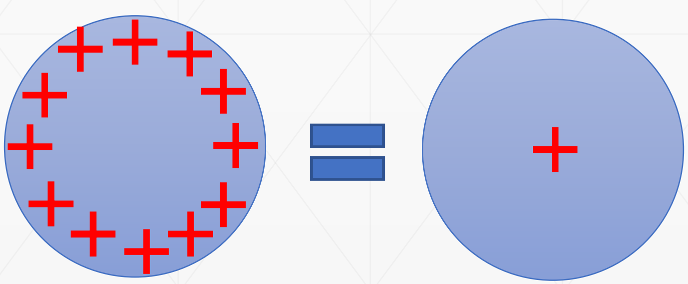


ładunki o tym samym znaku odpychają się, a o przeciwnych znakach przyciągają się

$$F = \underbrace{\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}}_{k}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = k\,\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

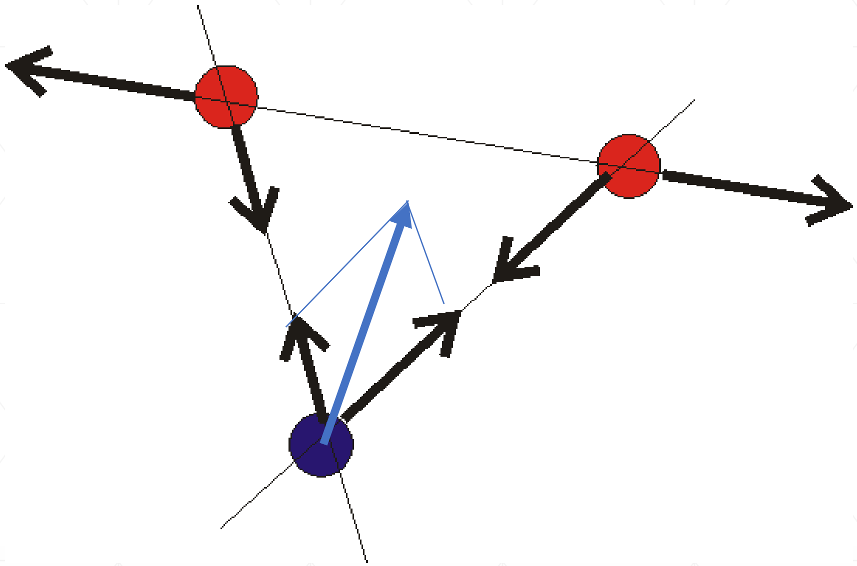
$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_i$$

gdzie $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}$ $C^2/(Nm^2)$ to przenikalność dielektryczna próżni



Jednorodnie naładowana powłoka kulista przyciąga lub odpycha naładowaną cząstkę, znajdującą się na zewnątrz powłoki tak, jakby cały ładunek był skupiony w jej środku.

Zasada superpozycji

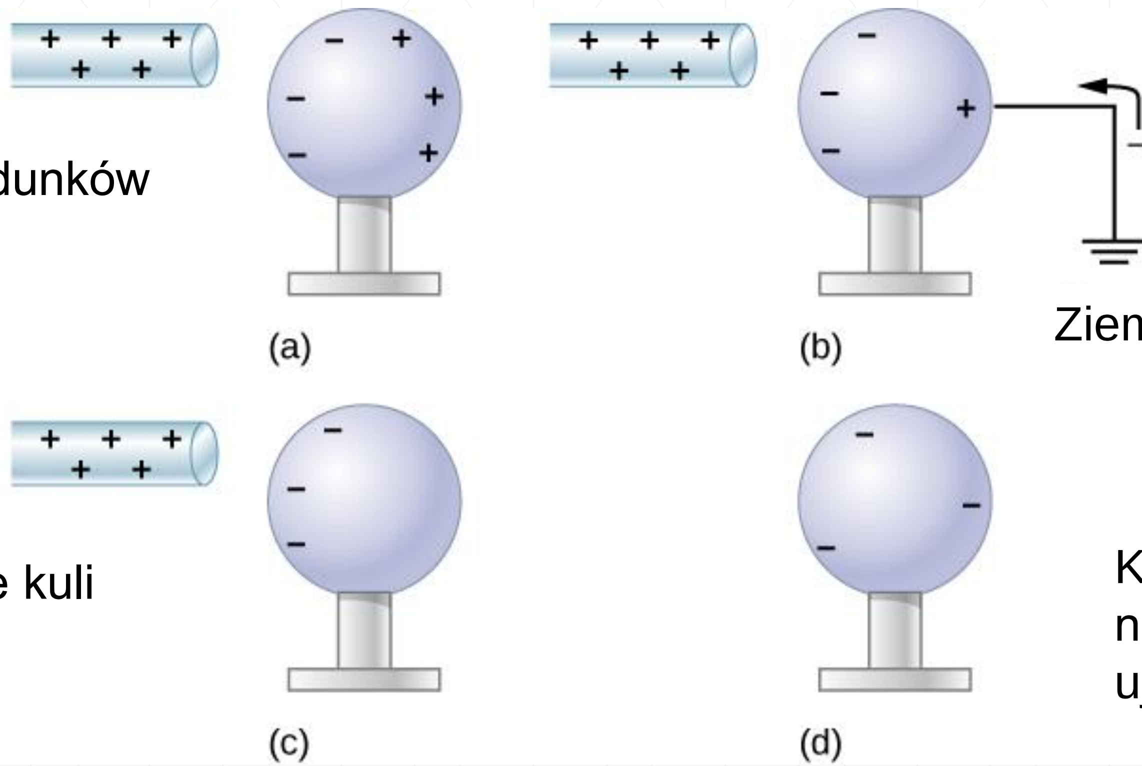


Siły oddziaływania coulombowskiego pomiędzy parą ładunków (np. czerwonych) nie ulegną zmianie jeśli pojawi się trzeci ładunek (niebieski). Inaczej mówiąc ładunki oddziałują parami tak jakby inne ładunki nie istniały. Jest to prawo eksperymentalne.

Siłę wypadkową działającą na każdy ładunek znajdujemy (korzystając z zasady superpozycji) jako sumę wektorową sił odziaływania wszystkich innych ładunków na dany ładunek

Elektryzowanie metalowych kul

Separacja ładunków



Uziemienie kuli

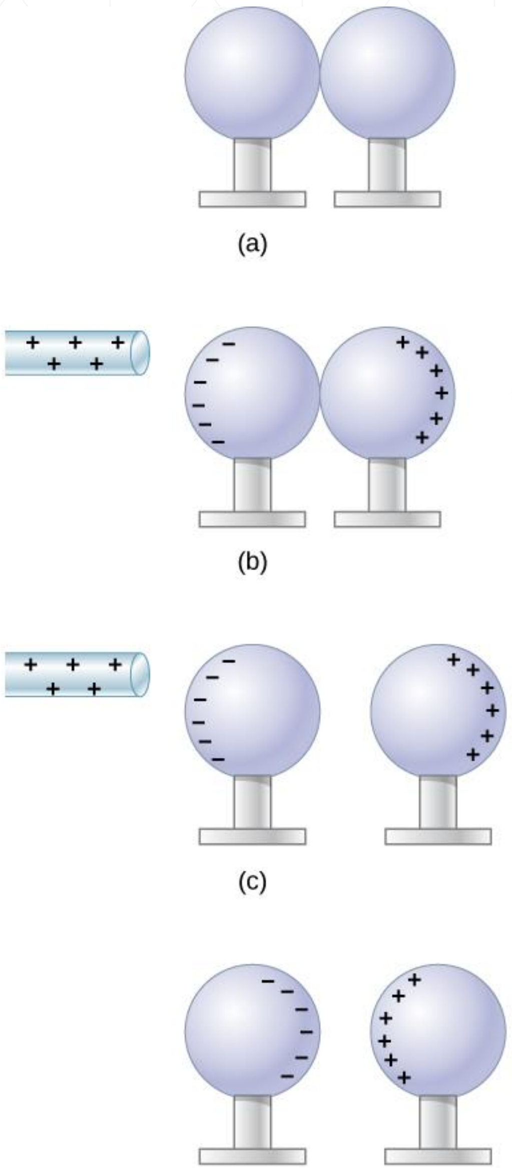
Ziemia

Odłączenie kuli od ziemi

Kula pozostaje naładowana ujemnie

Plastik ładuje się przez pocieranie ujemnie, a szkło dodatnio

Elektryzowanie metalowych kul



(a)

Zbliżamy naładowany pręt

Separacja ładunków

(b)

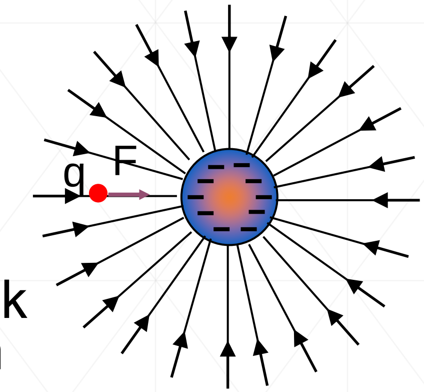
Rozdzielenie kul

(c)

Każda kula jest naładowana, jedna dodatnio, druga ujemnie

(d)

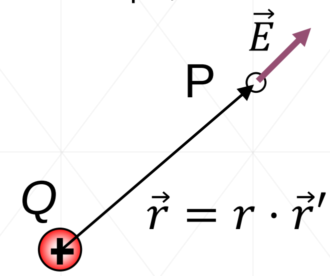
Pole elektryczne



- Natężenie pola elektrycznego - wektor określający kierunek siły elektrostatycznej działającej na umieszczony w danym punkcie dodatni ładunek próbny *q*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

[N/C] lub [V/m]



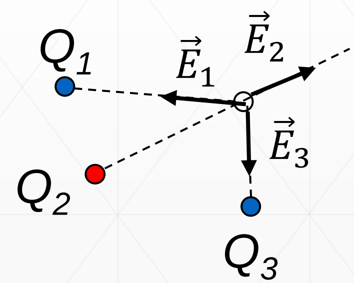
- Pole elektryczne ładunku punktowego

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r}'$$

gdzie $\vec{r}'$ jest wektorem jednostkowym skierowanym od ładunku *Q* do punktu *P(x, y, z)*

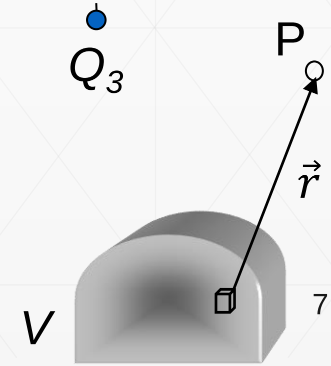
- Pole od n ładunków punktowych

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{r_j^2}\vec{r}_j' = \sum_{j=1}^{n}\vec{E}_j\,(x,y,z)$$

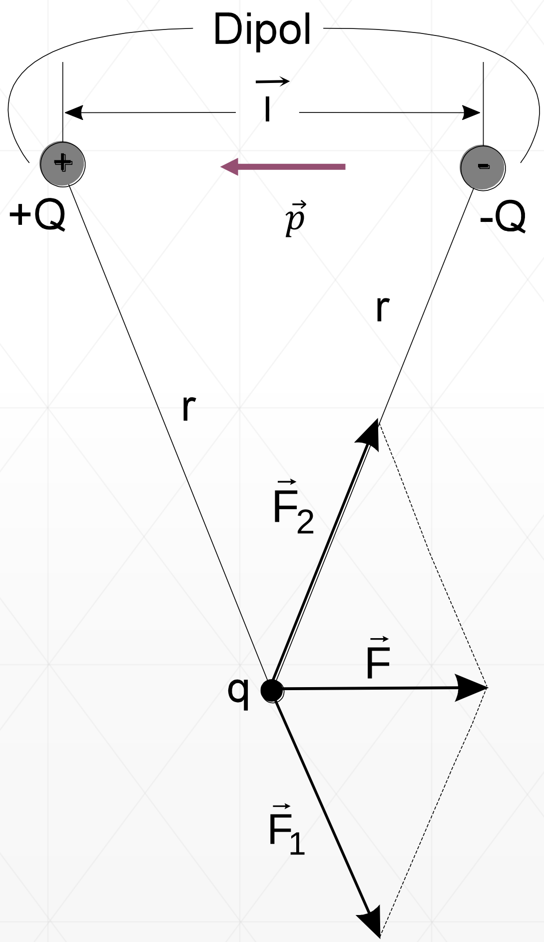


- Pole od ładunku rozłożonego z gęstością ρ

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\int_V \frac{\rho(x,y,z)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dxdydz$$



Dipol elektryczny



moment dipolowy $\vec{p} = Q\vec{l}$

z podobieństwa trójkątów $\dfrac{F}{F_1} = \dfrac{l}{r}$

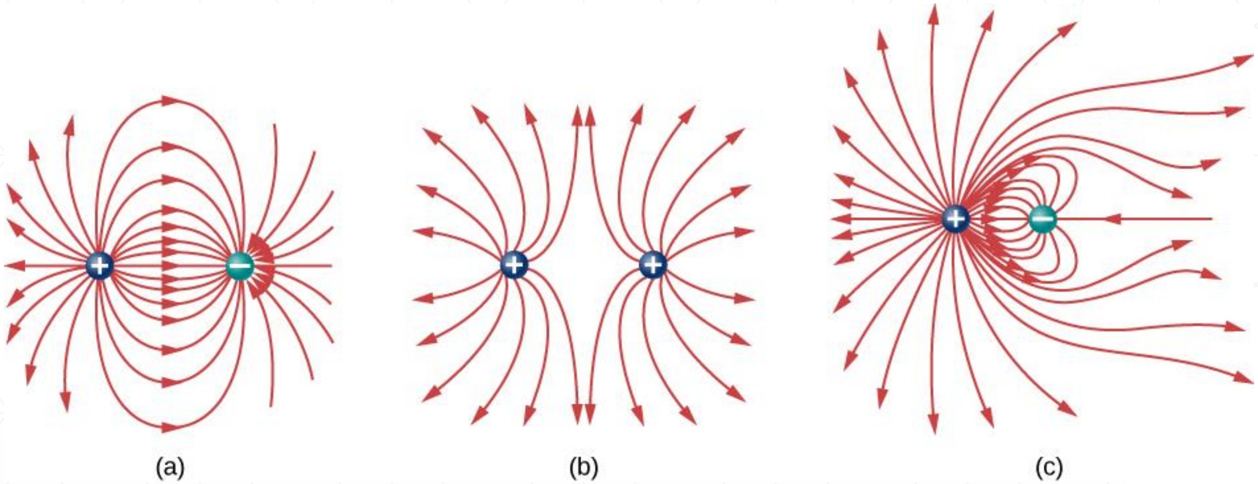
$$F = \frac{l}{r} F_1 = \frac{l}{r}\left(k\frac{Qq}{r^2}\right) = qk\frac{p}{r^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{p}{r^3}$$

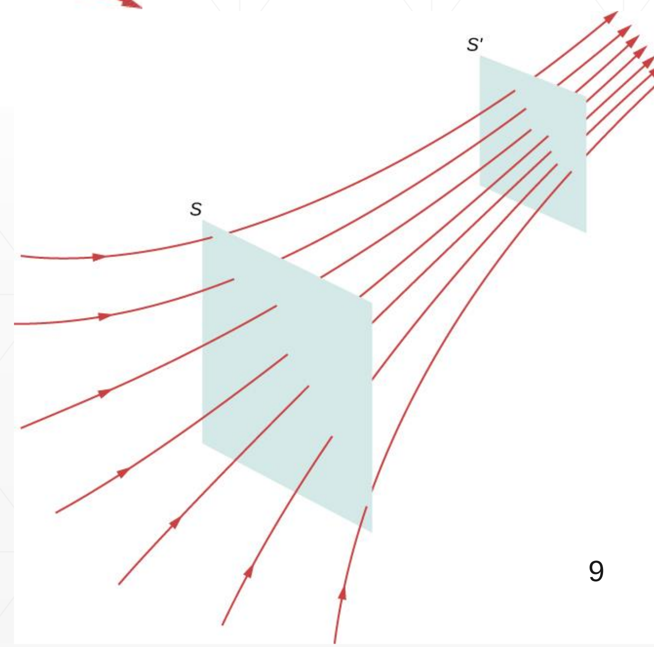
Pole elektryczne dipola szybko maleje z odległością

Linie sił pola elektrycznego

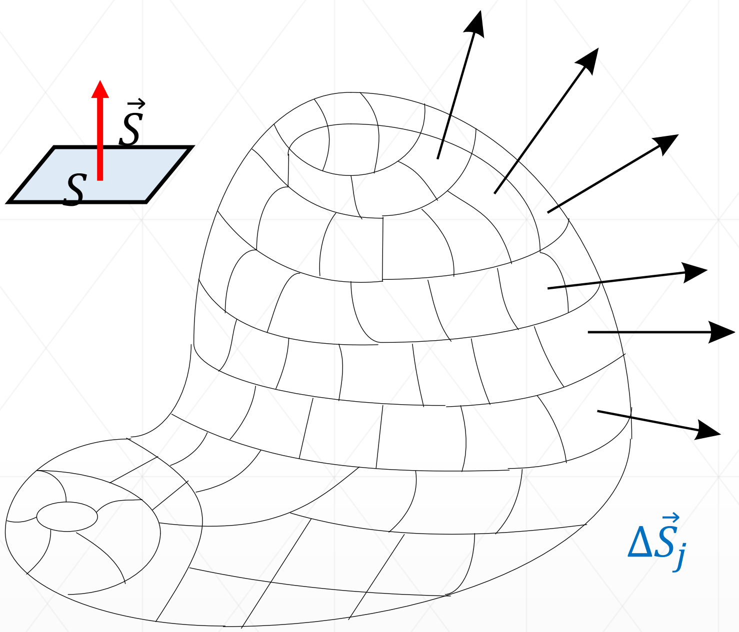
Różne rozkłady ładunków



Gęstość linii ~ miara natężenia pola



Strumień pola elektrycznego



strumień to iloczyn natężenia pola przez powierzchnię

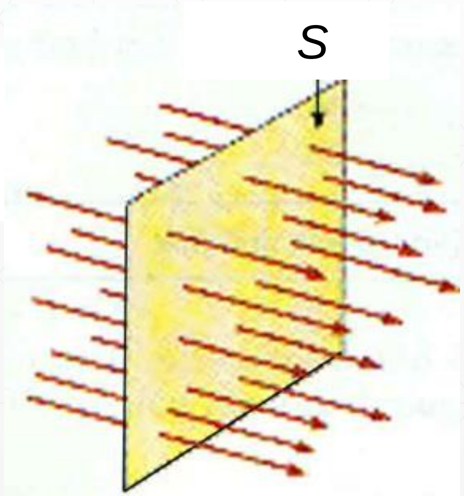
dla pola jednorodnego:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = EScos\alpha \qquad [\,\mathrm{V\ m}\,]$$

dla pola niejednorodnego

$$\Phi_E = \sum_j \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{S}_j = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

dla powierzchni zamkniętej wektor ΔS skierowany jest na zewnątrz tej powierzchni



strumień określa liczbę linii sił pola przechodzących przez daną powierzchnię

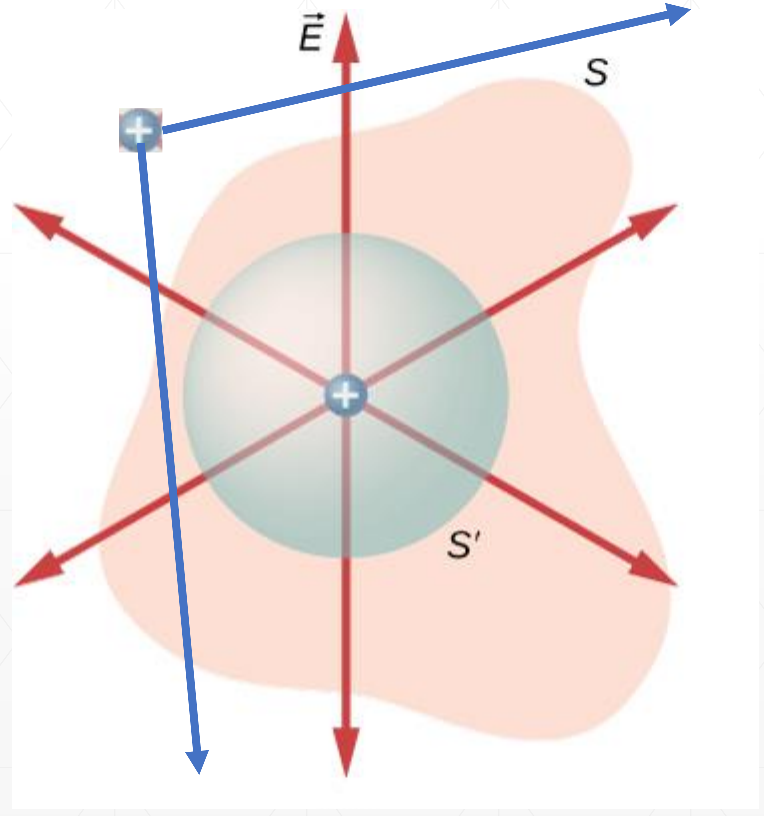
Prawo Gaussa

- strumień natężenia pola elektrycznego przez dowolną, zamkniętą powierzchnię równy jest całkowitemu ładunkowi zamkniętemu w tej powierzchni podzielonemu przez ε_o

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_o}$$

- w przypadku ładunku o gęstości objętościowej

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V \rho dV$$



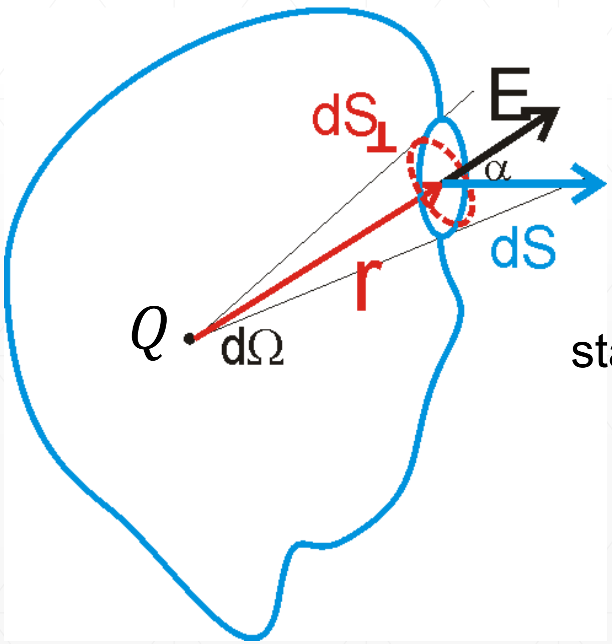
Prawo Gaussa

Strumień pola Φ_E od ładunku punktowego Q przez powierzchnie kuli o promieniu r

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} \vec{r}' \cdot \vec{r}' dS = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_o r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_o r^2} \cdot 4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Jeżeli powierzchnia nie jest kulista

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS\, cos\alpha = E\, dS_\perp$$



$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E r^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{d}\Omega$$

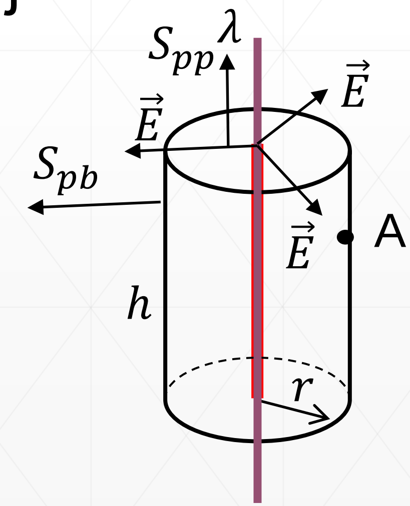
stąd prawo Gaussa

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_\Omega \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{d}\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Algorytm wyznaczania natężenia pola z prawa Gaussa

- wybieramy powierzchnię Gaussowską:
  - prostopadłą lub równoległą do E
  - tak aby E było stałe na tej powierzchni
- obliczamy strumień
- określamy ładunek zawarty wewnątrz tej powierzchni
- stosujemy prawo Gaussa
- obliczamy wartość pola E

liniowy rozkład ładunku

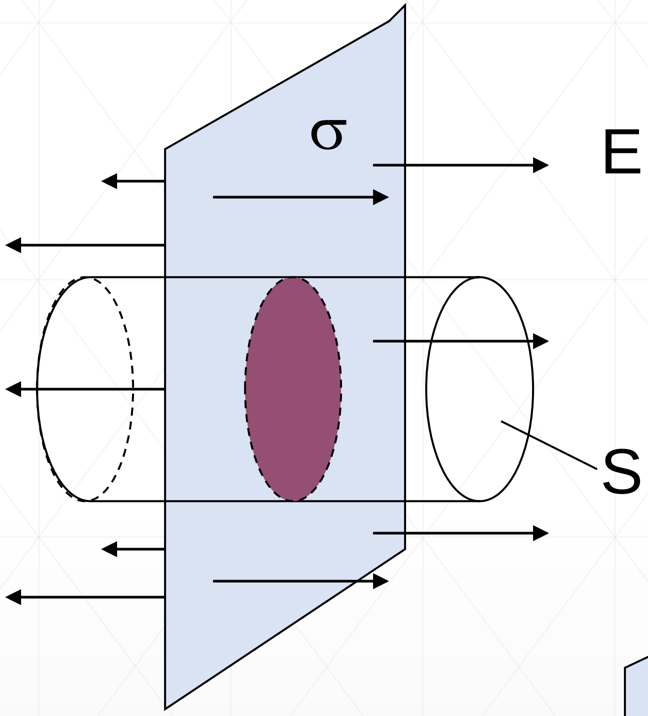


$$\Phi = \Phi_{pb} + 2\Phi_{pp} = \Phi_{pb} = E2\pi rh$$

$$Q = \lambda h$$

$$\Phi = Q/\varepsilon_o \quad \Rightarrow \quad E2\pi rh = \lambda h/\varepsilon_o \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

PRZYKŁAD - nieskończona płaszczyzna o gęstości powierzchniowej ładunku σ

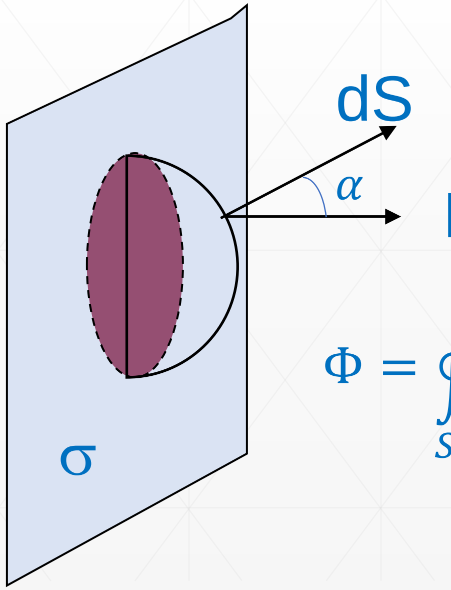


$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\,E\,S$$

strumień przez powierzchnię boczną walca jest równy zero

z prawa Gaussa

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$



$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \int_S \cos\alpha \, dS$$

z wybór innej powierzchni Gaussowskiej, np. kuli, znacznie komplikuje obliczenia

Różniczkową postać prawa Gaussa

- Prawo Gaussa jest wygodnie stosować do rozkładów ładunku o dużej symetrii
- przy braku symetrii stosujemy różniczkową postać prawa Gaussa wiążącą wielkości charakteryzujące pole i jego źródła w każdym punkcie pola
- przy małej objętości ΔV można przyjąć, że ładunek zawarty w tej objętości wynosi $\rho\Delta V$ czyli

$$\oint_{\Delta S} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\rho\Delta V}{\varepsilon_o}$$

- wykorzystując definicję dywergencji – rozbieżności pola

$$div\vec{E} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta S}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\frac{\rho\Delta V}{\varepsilon_o} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$div\vec{E} = \nabla\vec{E}$$

- zatem różniczkową postać prawa Gaussa to

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

- dywergencja jest wielkością skalarną będącą miarą liczby linii sił na jednostkę objętości. Jeżeli w danym punkcie $\rho \neq 0$, to w tym punkcie zaczynają się lub kończą nowe linie sił, jak $\rho = 0$ to nie powstają nowe linie sił w tym punkcie.

Energia potencjalna

Pole $\vec{E}$ jest polem bezwirowym

$$rot\vec{E} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Pole elektrostatyczne jest polem zachowawczym tzn.

$$W_{ABA} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

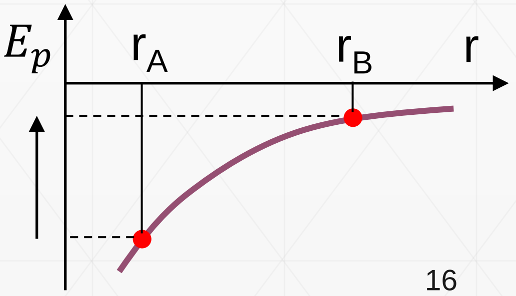
praca nie zależy od drogi

- Energia potencjalna to praca jaką muszą wykonać siły zewnętrzne, aby przenieść ładunek z nieskończoności do danego punktu pola

$$E_p = -q \int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Energia potencjalna ładunku punktowego q umieszczonego w polu ładunku Q (tor radialny więc $dl = dr$)

$$E_p = -q \int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_o} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\, \varepsilon_o} \frac{qQ}{r}$$



Q, q różnoimienne to $E_p < 0$

przy rozsuwaniu siły zew. wykonują pracę to E_p wzrasta

Potencjał pola elektrostatycznego

- Potencjał elektryczny określamy jako energię potencjalną jednostkowego ładunku

$$V = \frac{E_p}{q}$$

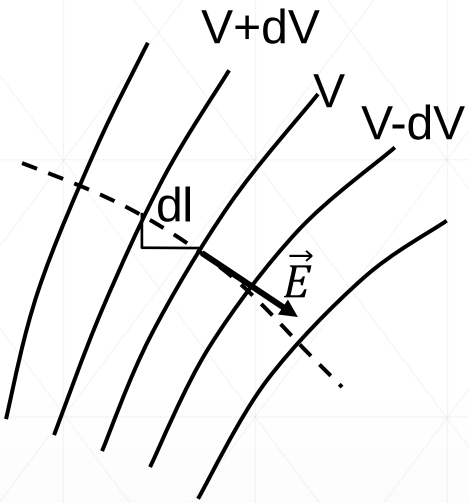
wolt V = J/C

- Potencjał elektryczny jest to praca jaką należy wykonać aby przenieść jednostkowy ładunek z nieskończoności na odległość r od danego ładunku Q

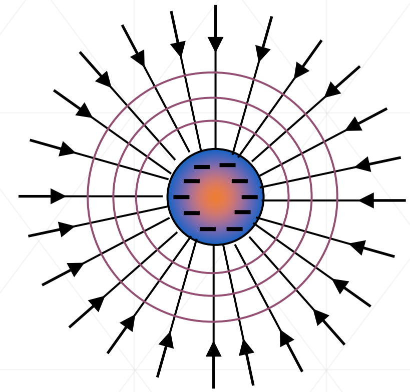
$$V = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Różnica potencjałów – napięcie elektryczne



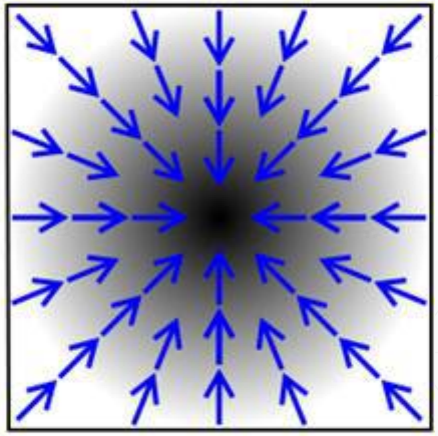
$$U = \Delta V = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{E} = -grad\,V \qquad \vec{E} = -\nabla V$$

∇ operator nabla

$$grad\,V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$



Wizualizacja gradientu na przykładzie koloru. Im jest on ciemniejszy, tym większa wartość funkcji.

powierzchnie ekwipotencjalne – stały potencjał

$V = \text{const} \Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ czyli $\vec{E} \perp d\vec{r}$

powierzchnie ekwipotencjalne są prostopadłe do linii sił pola

Równanie Poissona

- Korzystając ze związku natężenia pola z potencjałem

$$\vec{E} = -grad\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$div\ grad\, V = \nabla \cdot \nabla\, V = \Delta\, V$$

- dywergencja pola wynosi:

$$div\, \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)$$

- równanie Gaussa $div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ przechodzi w tzw. równanie Poissona

$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$\Delta V = \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}$-
nazywa się laplasjanem potencjału

- Równanie to opisuje związek potencjału V z gęstością objętościową ładunku ρ i umożliwia znajdowanie potencjału, gdy znana jest funkcja i podane warunki brzegowe na brzegach obszaru w którym szukamy potencjału.

Pojemność elektryczna

Stosunek nagromadzonego ładunku do potencjału dla danego przewodnika jest stały i nazywa się pojemnością elektryczną

$$C = \frac{Q}{V} \qquad 1\mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}}$$

Pojemność zależy od rozmiarów i kształtu przewodnika oraz od otaczających go innych przewodników

Układ dwóch przewodników różnoimiennie naładowanych i tak położonych aby pole było ograniczone do obszaru pomiędzy nimi nazywamy kondensatorem i jego pojemność wynosi:

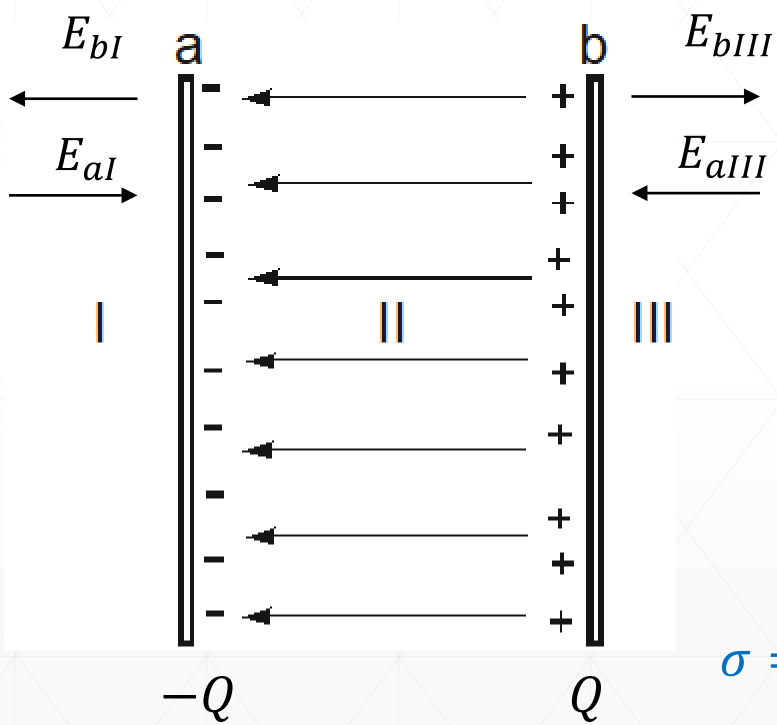
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{U}$$

Dla kondensatora płaskiego o powierzchni *S* i odległości okładek *x*

$$C = \frac{\varepsilon_0\, S}{x}$$

Kondensator płaski

Wyznaczmy natężenie pola elektrycznego dla kondensatora płaskiego o powierzchni okładek S i odległości okładek x naładowanego ładunkiem Q



$$E_I = E_{aI} + E_{bI} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = 0$$

$$E_{III} = E_{aIII} + E_{bIII} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = 0$$

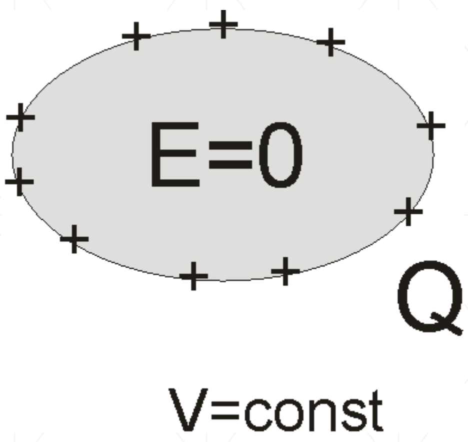
$$E_{II} = E_{aII} + E_{bII} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

$$\sigma = \frac{Q}{S} \qquad E_{II} = -\frac{Q}{\varepsilon_o S}$$

Pojemność kondensatora płaskiego przy zaniedbaniu efektów brzegowych wynosi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{U} \qquad U = \Delta V = -E\,x = \frac{Q}{\varepsilon_o S}\,x \qquad \text{czyli} \qquad C = \frac{\varepsilon_0\,S}{x}$$

Pojemność elektryczna odosobnionego przewodnika



Rozpatrzmy kawałek metalu który został pozbawiony części elektronów. W równowadze pole wewnątrz przewodnika zeruje się. Ładunek dodatni gromadzi się jedynie na powierzchni. Potencjał V też musi być stały i jednakowy w całym przewodniku.
Potencjał V jest proporcjonalny do zgromadzonego ładunku Q : $V = \frac{1}{C} Q,\qquad C = \frac{Q}{V}$

C pojemność elektryczna – stosunek ładunku zgromadzonego na przewodniku do jego potencjału

Aby zgromadzić ładunek Q na powierzchni metalu trzeba wykonać pracę równą energii potencjalnej zgromadzonego ładunku:

$$E_p = W = \int_0^Q V(Q) dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U$$

W tym przypadku $U = \Delta V = V - 0 = V$

Energia zmagazynowana w polu elektrycznym

- W płaskim kondensatorze, przy zaniedbaniu efektów brzegowych, natężenie pola elektrycznego ma taką samą wartość we wszystkich punktach między okładkami

- Stąd gęstość energii u, czyli energia potencjalna na jednostkę objętości też powinna być stała

- Skoro: $E_p = \frac{1}{2} C U^2$ to $u = \frac{E_p}{Sx} = \frac{CU^2}{2Sx}$ gdzie Sx to objętość obszaru między okładkami

- Podstawiając $C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$ otrzymujemy:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{U}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

- Gęstość energii u pola elektrycznego jest proporcjonalna do kwadratu natężenia tego pola. Wzór ten jest prawdziwy bez względu na źródło pola elektrycznego.

Podsumowanie

- Pola elektrostatyczne: natężenie, potencjał, linie sił pola
- Pole źródłowe, bezwirowe, zachowawcze
- Pojęcie strumienia pola elektrostatycznego
- Prawo Gausa i jego zastosowanie do wyznaczania pola
- Pojemność elektryczna
- Energia zmagazynowana w polu elektrycznym