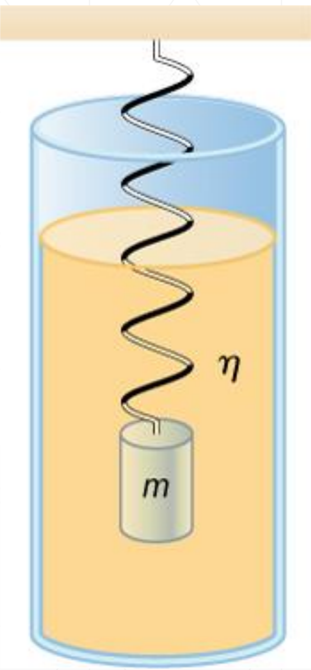
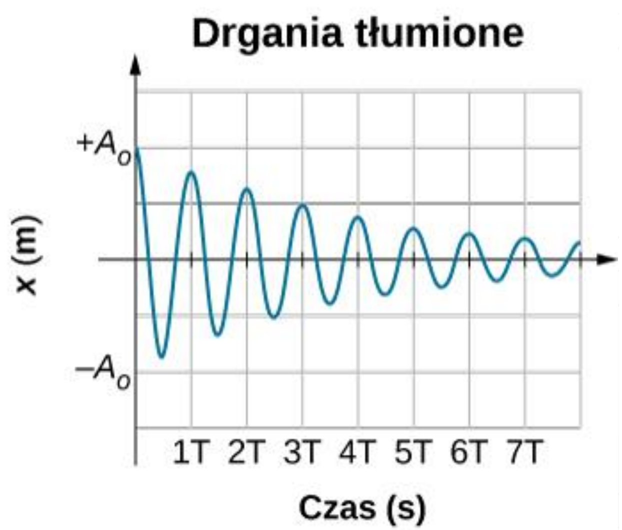
14. Drgania wymuszone - rezonans

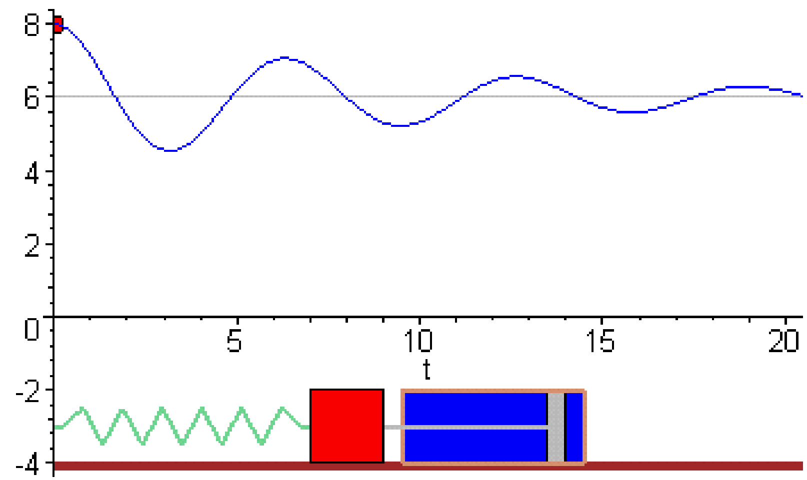
Harmoniczne drgania nieswobodne:

- drgania tłumione
- drgania wymuszone
- rezonans
- drgania o kilku stopniach swobody
- drgania normalne

Przykłady drgań







Równanie drgań tłumionych

W przypadku działania sił oporu proporcjonalnych do prędkości ciała

$$F_t = -bv = -b\frac{dx}{dt}$$

Równanie ruchu $m\,\frac{d^2x}{dt^2} = F$ przyjmuje postać $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0$$

$\beta = \frac{b}{2m}$ - współczynnik tłumienia

Dla słabego tłumienia, gdy $(\beta < \omega_o)$, rozwiązanie tego równania jest postaci:

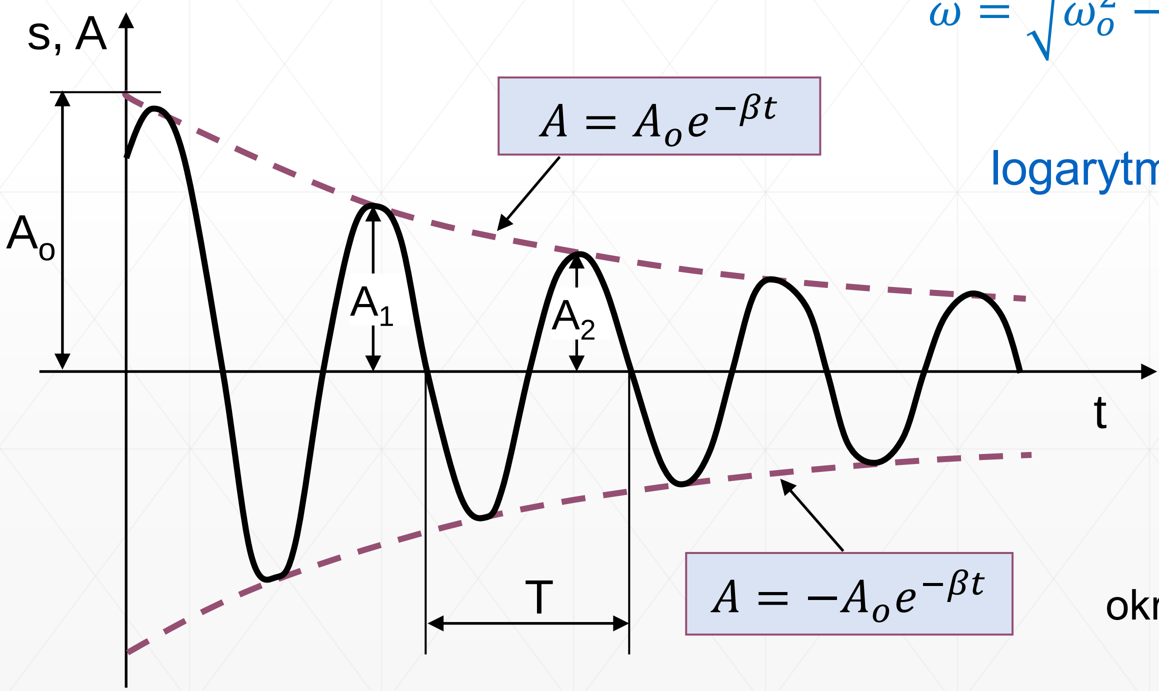
$x = A_o e^{-\beta t}\cos(\omega\,\mathrm{t} + \phi)$ gdzie $\omega^2 = (\omega_o^2 - \beta^2)$

Drgania tłumione

$$s = \underbrace{A_o e^{-\beta t}}_{\text{amplituda malejąca wykładniczo w czasie}} \cos(\omega\, \mathrm{t} + \phi)$$

częstość drgań tłumionych

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} > T_o$$



logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_o e^{-\beta t}}{A_o e^{-\beta (t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta \cdot T$$

określa szybkość zmniejszania się amplitudy drgań

Ruch aperiodyczny

$$\omega^2 = (\omega_o^2 - \beta^2)$$

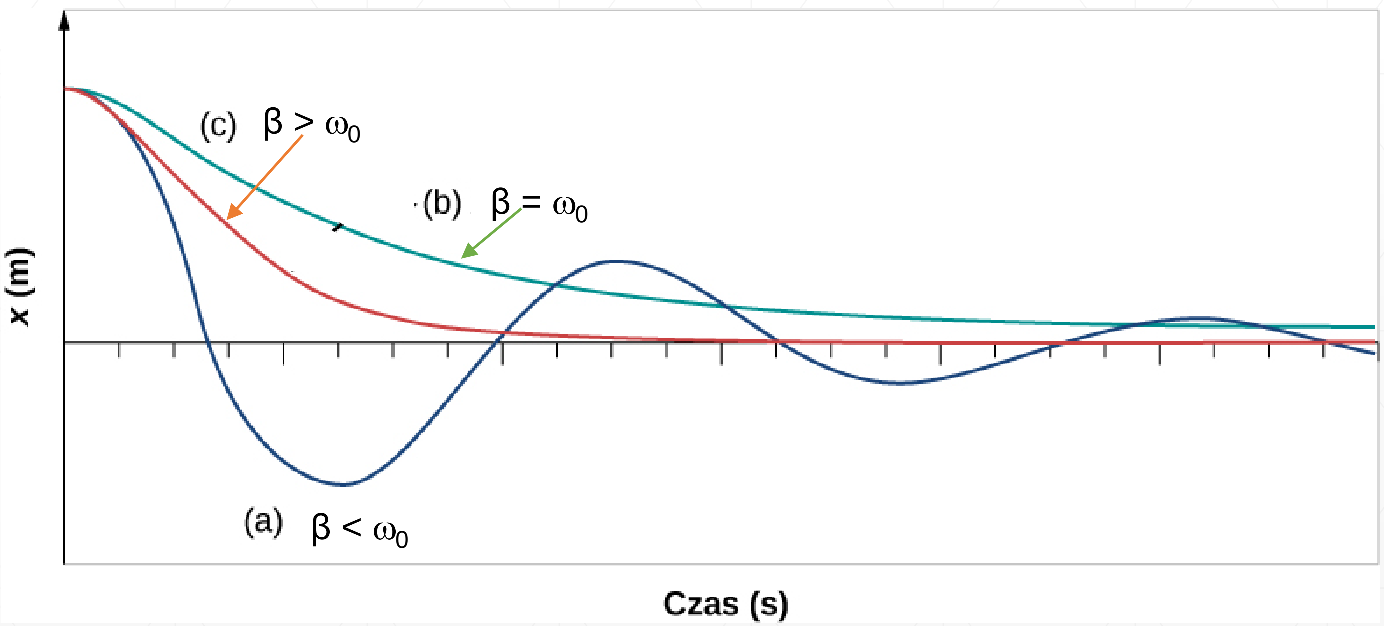
Wartość współczynnika tłumienia ma silny wpływ na charakter zmian drgań harmonicznych

Dla słabego tłumienia $(\beta < \omega_o)$ – tłumienie podkrytyczne

Dla silnego tłumienia $(\beta = \omega_o)$ – tłumienie krytyczne

$(\beta > \omega_o)$ – tłumienie nadkrytyczne

ruch aperiodyczny szybkie tłumienie drgań



Drgania wymuszone

- aby zapobiec tłumieniu drgań należy skompensować straty energii
- przykładamy do układu drgającego harmoniczną siłę wymuszającą lub siłę elektromotoryczną

$$F = F_o \cos \omega\, t \qquad V = V_o \cos \omega\, t$$

równanie ruchu przyjmuje postać:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_o \cos \omega t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = x_o \cos \omega\, t \qquad gdzie \quad x_o = \frac{F_o}{m}$$

równanie drgań wymuszonych

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta\frac{dz}{dt} + \omega_o^2 z = x_o e^{i\omega t}$$

równanie drgań wymuszonych w postaci zespolonej

Rozwiązanie równania drgań wymuszonych

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\beta\frac{dz}{dt} + \omega_o^2 z = x_o e^{i\omega t} \qquad \frac{dz}{dt} = i\Omega z_o e^{i\Omega t} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = i^2\Omega^2 z_o e^{i\Omega t}$$

Rozwiązania tego równania *z(t)* szukamy w postaci drgania harmonicznego o amplitudzie z_0 i częstości Ω: $\boldsymbol{z = z_o e^{i\Omega t}}$

$$-\Omega^2 z_o e^{i\Omega t} + 2\beta i\Omega z_o e^{i\Omega t} + \omega_o^2 z_o e^{i\Omega t} = x_o e^{i\omega t}$$

Równanie to musi być spełnione dla każdej chwili czasu, więc $\Omega = \omega$

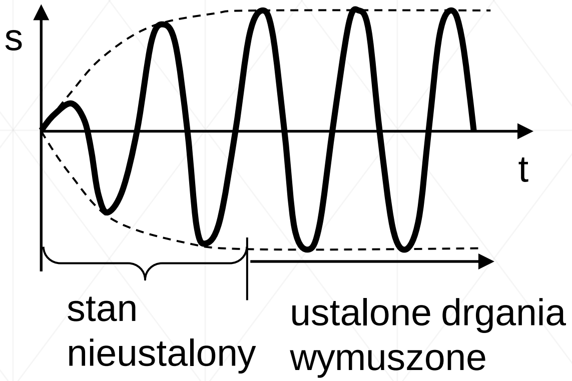
$$z_o = \frac{x_o}{(\omega_o^2 - \omega^2) \quad + 2i\beta\omega} = \frac{x_o(\omega_o^2 - \omega^2)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} + \frac{-2\beta\omega x_o}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2} i$$

korzystając z definicji liczby zespolonej $z_o = |z_o| \cdot e^{i\phi} = |z_o|(\cos\phi + i\sin\phi) = a + b \cdot i$
Wyznaczamy amplitudę i fazę drgań wymuszonych:

$$A = |z_o| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{x_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad tg\phi = \frac{sin\phi}{cos\phi} = \frac{-2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

$$z = |z_o| \cdot e^{i\phi} \cdot e^{i\omega t} = |z_o| \cdot e^{i(\omega t + \phi)} \qquad s = \operatorname{Re} z = |z_o| \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Wnioski



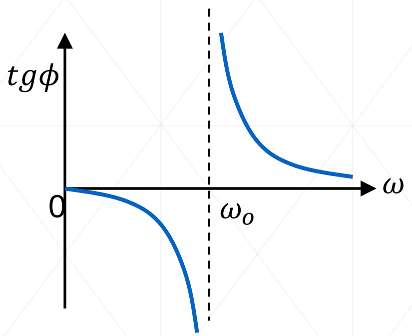
- po początkowym, nieustalonym stadium procesu następują ustalone drgania wymuszone
- drgania wymuszone odbywają się z częstością siły wymuszającej ω
- amplituda tych drgań zależy od amplitudy siły wymuszającej, jej częstości i parametrów układu drgającego

$$A = \frac{x_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

- faza drgań zależy od częstości siły wymuszającej

$$tg\phi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

Właściwości ustalonych drgań wymuszonych



a) Siła wymuszająca o małej częstości $\omega \ll \omega_o$

$$A = \frac{x_o}{\sqrt{(\omega_o^2 - \cancel{\omega^2})^2 + \cancel{4\beta^2\omega^2}}} \approx \frac{x_o}{\omega_o^2}$$

$$tg\phi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2} \to 0 \Rightarrow \phi \to 0$$

zgodność fazy siły z wychyleniem

b) Rezonans $\omega \approx \omega_o$

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_o^2 - 2\beta^2} \approx \omega_o$$

częstość rezonansowa

$$A_r = \frac{x_o}{2\beta\sqrt{\omega_o^2 - \beta^2}} \approx \frac{x_o}{2\beta\omega_o}$$

$$tg\phi = \frac{-\omega}{\beta} \to -\infty \quad \Rightarrow \phi \to -\frac{\pi}{2}$$

wychylenie opóźnia się w fazie o $\pi/2$

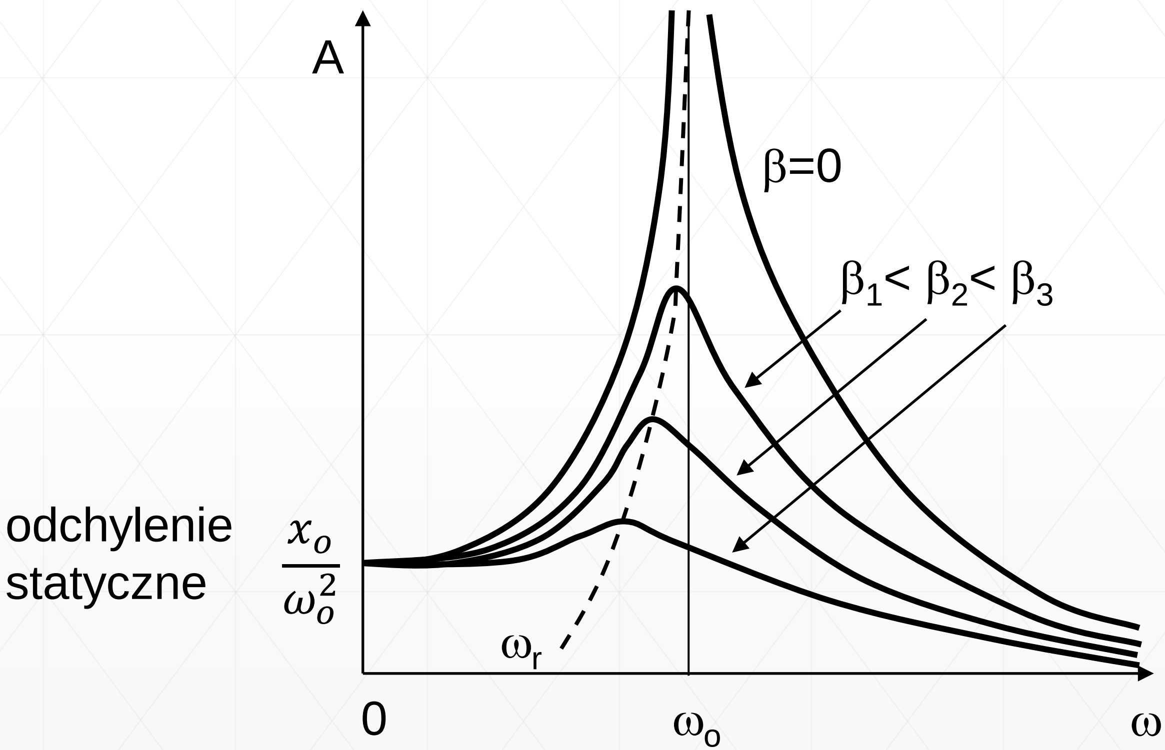
c) Siła wymuszająca o dużej częstości $\omega \gg \omega_o$

$$A = \frac{x_o}{\sqrt{(\cancel{\omega_o^2} - \omega^2)^2 + \cancel{4\beta^2\omega^2}}} = \frac{x_o}{\omega^2}$$

$$tg\phi = \frac{2\beta}{\omega} \to 0 \Rightarrow \phi \to -\pi$$

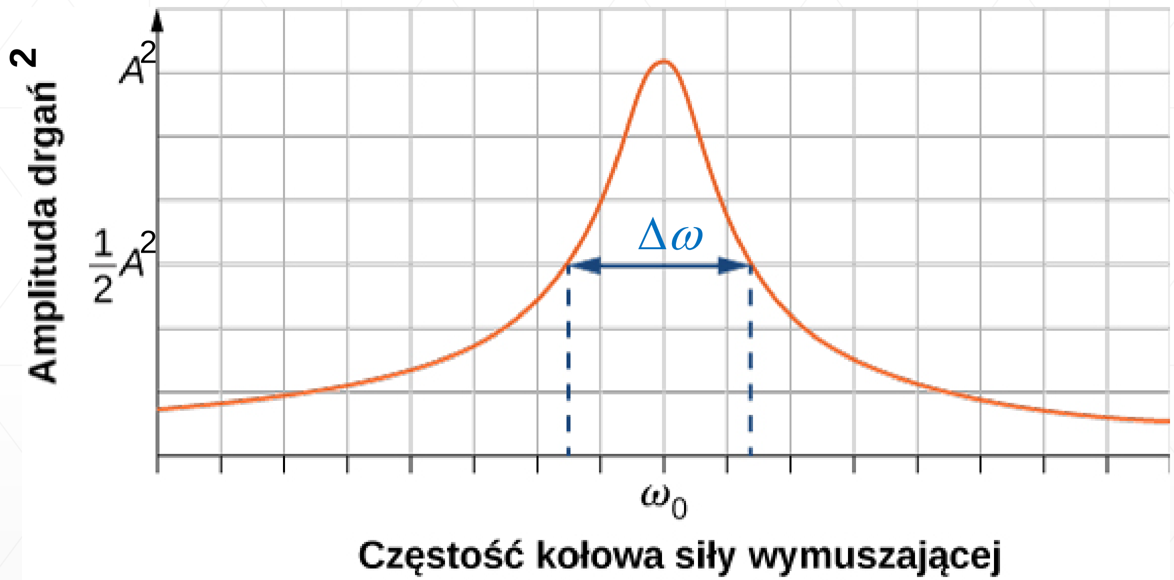
wychylenie opóźnia się w fazie o π

Amplituda drgań wymuszonych w funkcji częstości siły wymuszającej



Dobroć układu rezonansowego

Zdolność do wzmacniania sygnału – ile razy amplituda w rezonansie jest większa niż w obszarze częstości nierezonansowych

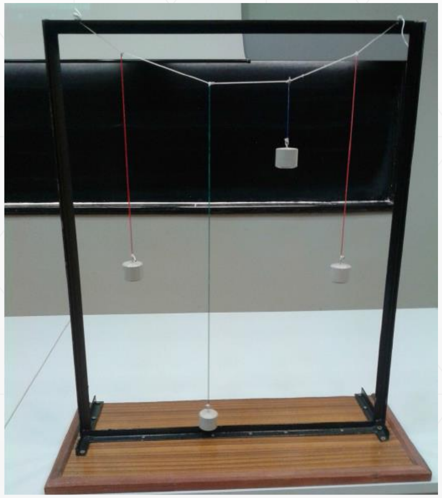


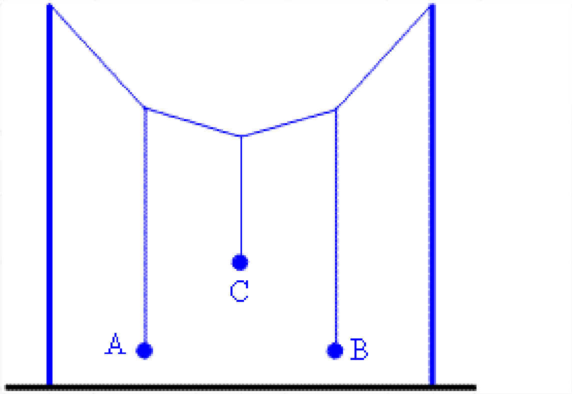
Dobroć układu zdefiniowana jest jako stosunek własnej częstości kołowej oscylatora do szerokości krzywej rezonansowej

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega$$

Przykłady rezonansu

- Wahadła zawieszone na rozpiętej między dwoma statywami nitce. Wahadło A przekazuje energię drgań do wahadła B, bo wahadła A i B mają ten sam okres drgań własnych, wahadło C ma inny.
- warunkiem rezonansu jest równość okresów drgań własnych ciał rezonujących.

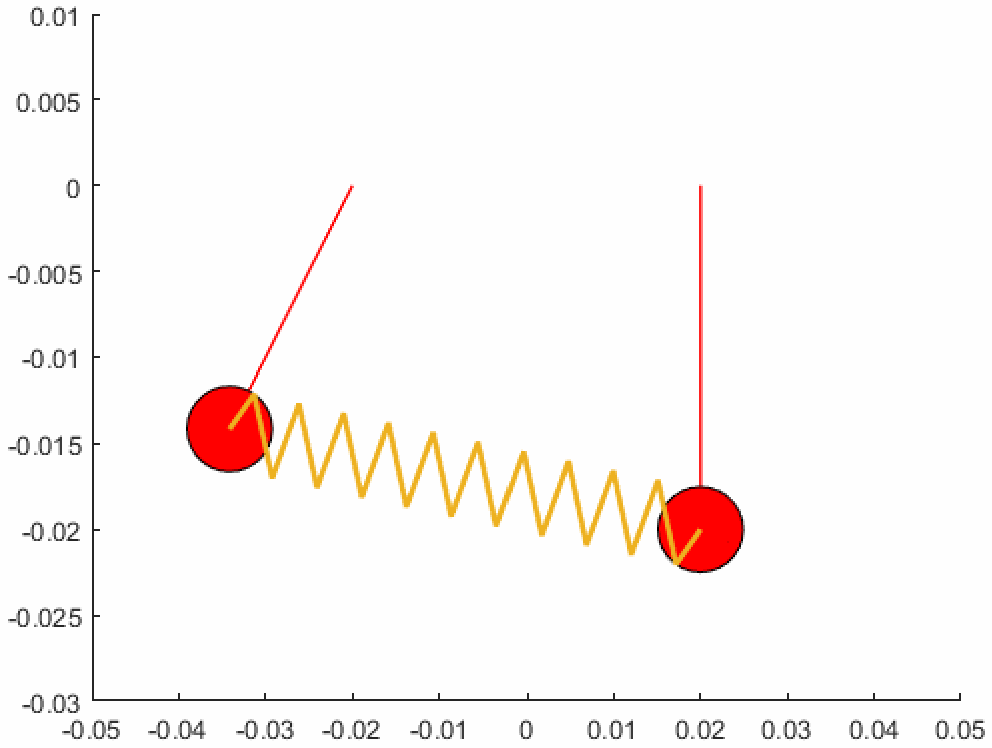


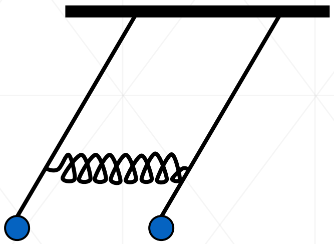


Niebezpieczne skutki rezonansu

W 1940 r. most w Tacoma w stanie Waszyngton uległ zniszczeniu.

Drgania o wielu stopniach swobody

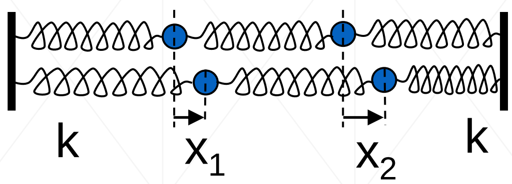


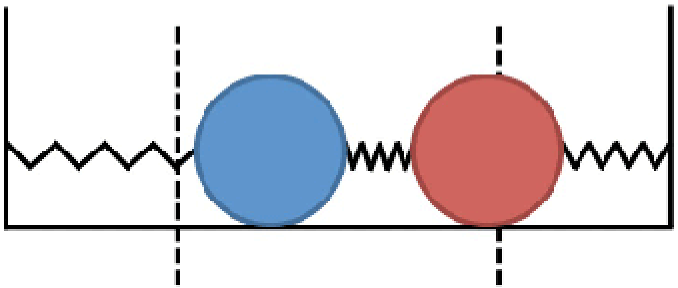


Wahadło sprzężone

Układ fizyczny ma N stopni swobody, jeśli do opisu procesów w nim zachodzących trzeba użyć N wielkości niezależnych

Drgania normalne oscylatora o dwóch stopniach swobody





$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2$$

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 - 2kx_2$$

$$m\frac{d^2(x_1 + x_2)}{dt^2} = -k(x_1 + x_2) \qquad \Psi_1 = x_1 + x_2$$

$$m\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} = -3k(x_1 - x_2) \qquad \Psi_2 = x_1 - x_2$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}\Psi_1 \qquad \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

$$\frac{d^2\Psi_2}{dt^2} = -\frac{3k}{m}\Psi_2 \qquad \omega_2 = \sqrt{3k/m}$$

$$\Psi_1 = 2A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\Psi_2 = 2A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

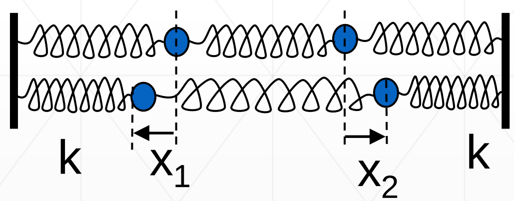
Nowe współrzędne Ψ_1, Ψ_2 nazywamy normalnymi, a same drgania drganiami własnymi czyli normalnymi

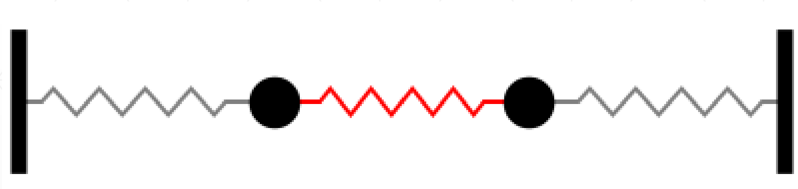
$$\left.\begin{aligned}\Psi_1 &= x_1 + x_2 \\ \Psi_2 &= x_1 - x_2\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(\Psi_1 + \Psi_2) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2 &= \frac{1}{2}(\Psi_1 - \Psi_2) = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)\end{aligned}$$

Drgania oscylatora o dwóch stopniach swobody są superpozycją dwóch drgań normalnych o różnych częstościach własnych

wahadła drgają z tą samą częstością w zgodnych fazach, przeciwnych kierunkach

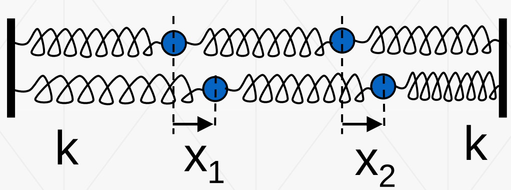
$$A_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$





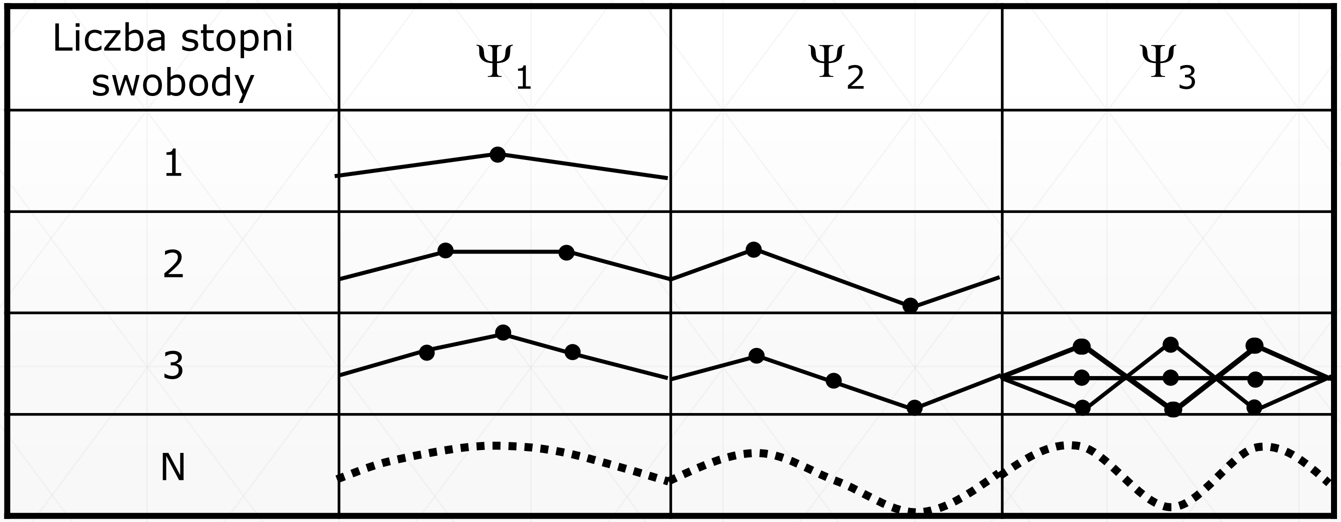
wahadła drgają z tą samą częstością w zgodnych fazach i kierunkach

$$A_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = A_1\cos(\omega_1 t + \phi_1)$$



Dla układu o N stopniach swobody:

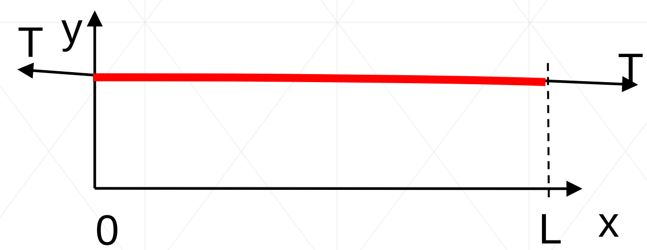
- istnieje N częstotliwości własnych,
- układ może wykonywać N drgań normalnych,
- dla drgań normalnych wszystkie elementy drgają w tej samej fazie, zaś amplitudy drgań są wzajemnie zależne



Drgania normalne struny (liny) rozpiętej wzdłuż osi x ze stałym naciągiem T

dla struny o skończonej długości L zamocowanej na obu końcach drgania normalne odbywają się ze stała częstotliwością i amplitudą zależną od położenia

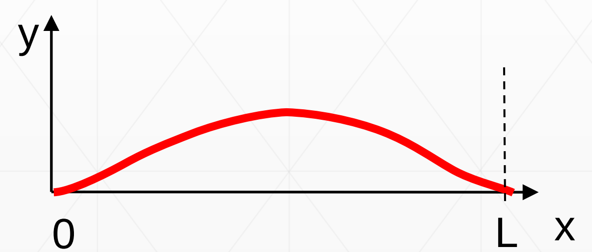
$$y(x,t) = A(x) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$



z warunku zamocowania na początku (x=0) amplitudę opisujemy funkcją *sin(kx)*

$$y(x,t) = A_o \sin(kx) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

z warunku zamocowania na końcu (x=L)



$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_n L = n\pi$$

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \qquad n = 1,2,3,\dots$$

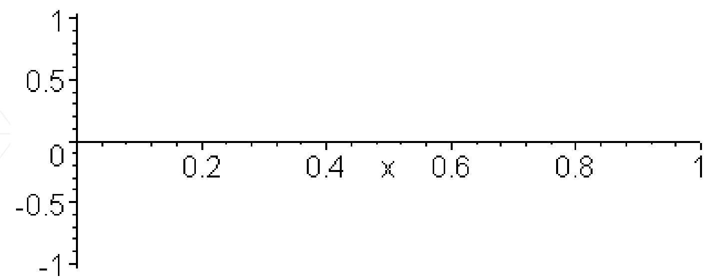
gdzie wielkość λ_n jest o okresem przestrzennym zwanym długością fali

Drgania normalne struny (liny) rozpiętej wzdłuż osi x ze stałym naciągiem T

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

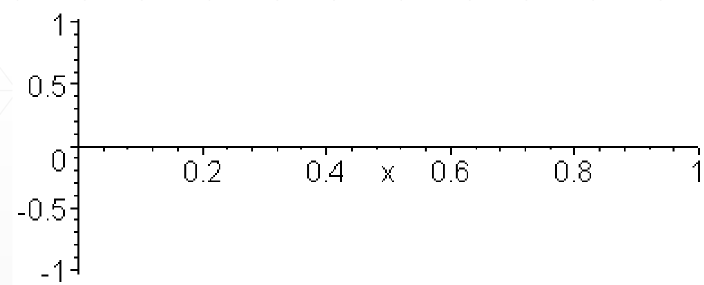
pierwsze drganie normalne dla n = 1
wszystkie punkty drgają zgodnie w fazie

$$\lambda_1 = 2L \qquad A(x) = A_o \sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)$$



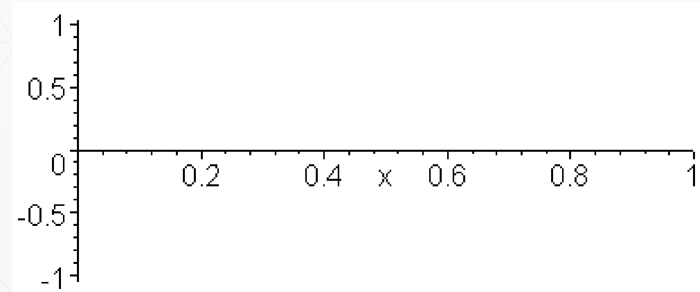
drugie drganie normalne dla n = 2

$$\lambda_2 = L \qquad A(x) = A_o \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$



drugie drganie normalne dla n = 3

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L \qquad A(x) = A_o \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$



drgania normalne struny są przykładem powstawania tzw. fali stojącej w strunie

Podsumowanie

- Pojęcie drgań tłumionych, postać drgań $x = A_o e^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi)$ i podstawowe parametry: częstotliwość, współczynnik tłumienia i logarytmiczny dekrement tłumienia.
- Aby podtrzymać ruch tłumiony musi działać siła wymuszająca.
- Drgania wymuszone zachodzą z częstotliwością wymuszenia, a amplituda i faza tych drgań zależy od częstotliwości wymuszenia.
- Dla częstości wymuszenia równej częstości drgań własnych zachodzi wzrost amplitudy drgań – rezonans.
- W przypadku drgań o wielu stopniach swobody wprowadzamy pojęcie drgań normalnych – wszystkie drgania zachodzą z jednakową częstością.
- Drgania własne (normalne) struny – fala stojąca.