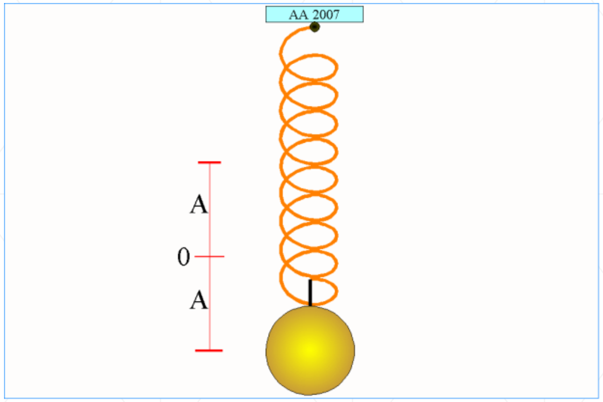
13. Drgania swobodne

- pojęcie drgań
- drgania harmoniczne
- drgania swobodne
- energia drgań
- składanie drgań harmonicznych
- dudnienie

Podstawowe definicje



- **drgania** – procesy, w których dana wielkość fizyczna na przemian rośnie i maleje
- **drgania swobodne** – gdy układ, na który nie działają zmienne siły zewnętrzne, zostanie wyprowadzony z położenia równowagi
- **okresowy ruch drgający (periodyczny)** – jeżeli wartości wielkości fizycznych zmieniające się podczas drgań, powtarzają się w pewnych odstępach czasu
- **drgania harmoniczne** – gdy przyspieszenie układu jest proporcjonalne do przemieszczenia i skierowane w kierunku położenia równowagi (wykres drgań opisany jest wówczas funkcją trygonometryczną *sin* lub *cos*)
- **oscylator harmoniczny** – układ wykonujący drgania harmoniczne np. wahadło, obwód LC

Okres i częstotliwość drgań

- **okres (ang. period),** oznaczamy T – czas wykonania jednego pełnego drgania (jedn. sekunda [s])
- **częstotliwość drgań (ang. frequency),** oznaczamy f – liczba drgań (oscylacji) w jednostce czasu (jedn. herc [Hz])
- zależność między częstotliwością i okresem:

$$f = 1/T$$

stąd 1 Hz = 1 s^{-1}

- **częstość kątowa (kołowa),** oznaczamy ω – jak szybko powtarza się dane zjawisko okresowe
- zależności między ω, a częstotliwością f i okresem T wynoszą:

$$\omega = 2\pi/T \qquad \omega = 2\pi f$$

- dla drgań swobodnych przyjmujemy oznaczenia z indeksem 0

$$\omega_0, \quad T_0, \quad f_0$$

Charakterystyka ruchu harmonicznego

Rozpatrzmy ruch masy *m* zawieszonej na sprężynie o stałej sprężystości *k*.
W tym przypadku siła wypadkowa ***F*** jest proporcjonalna do wychylenia i skierowana w kierunku położenia równowagi: $F = -k(x - x_0)$

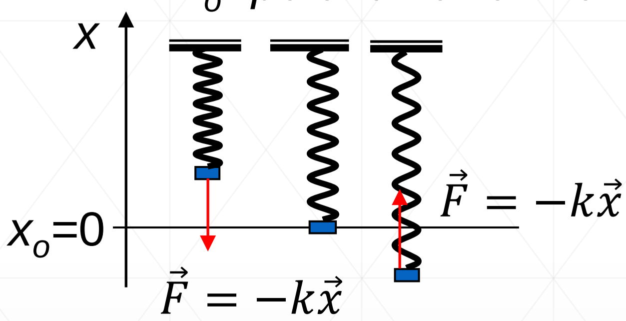
k – stała sprężystości

x_o- położenie równowagi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$$F = -k\,x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$$



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad \Leftrightarrow \quad ozn.\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\,x$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe drgań harmonicznych, którego rozwiązanie to:

$$x = A\,sin(\omega_0\,t + \phi_0)$$

Swobodny oscylator harmoniczny

częstość kątowa

faza początkowa

wychylenie z położenia równowagi s, x, α, I

amplituda - maksymalne wychylenie

$$s(t) = A\,sin(\underbrace{\omega_0 t + \phi_0}_{\phi})$$

ϕ - faza drgań

Z okresowości funkcji sin(α) wynika:

$$\phi(t+T_0) = \phi(t) + 2\pi$$

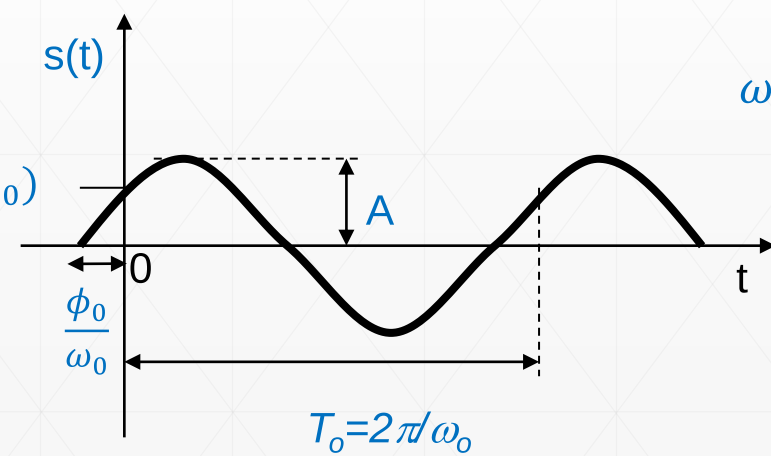
$$\omega_0(t+T_0) + \phi_0 = \omega_0 t + \phi_0 + 2\pi$$

$$\omega_0 T_0 = 2\pi$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

T_0 – okres drgań

$$s(0) = A\,sin(\phi_0)$$



Rozwiązania równania różniczkowego drgań harmonicznych

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\, x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\, x = 0$$

- równanie drgań

rozwiązanie:

$$x = A\,cos(\omega_0\, t + \phi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega_0 sin(\omega_0\, t + \phi_0)$$

stałe A, ϕ_0 wyznaczamy z warunków początkowych

$$x(0) = x_0 \qquad x_0 = A\,cos(\phi_0)$$

$$v(0) = v_0 \qquad v_0 = -A\,\omega_0 sin(\phi_0)$$

stąd:

$$tg(\phi_0) = \frac{-v_0}{x_0\omega_0} \qquad A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}}$$

Opis drgań przy pomocy liczb zespolonych:

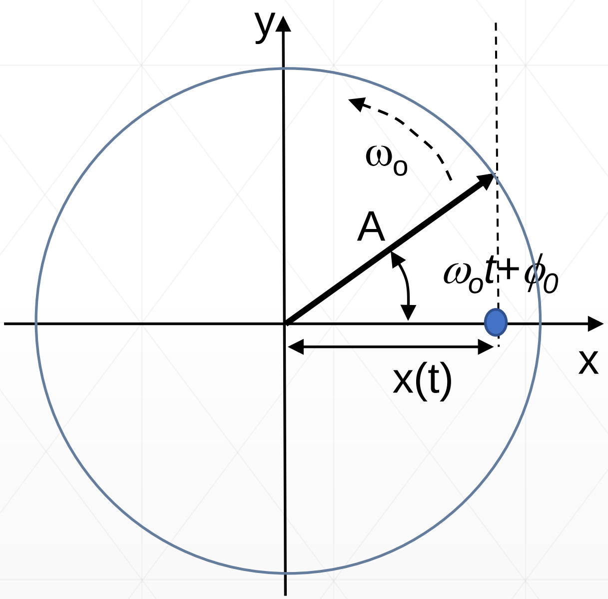
$$z = A\, e^{-i(\omega_0\, t + \phi_0)}$$

$$z = A\,[cos(\omega_0\, t + \phi_0) + i\, sin(\omega_0\, t + \phi_0)]$$

$$x = Re(z) = A\,cos(\omega_0\, t + \phi_0)$$

Ruch harmoniczny, a ruch po okręgu

Wektor o długości A obracający się z prędkością kątową ω_0

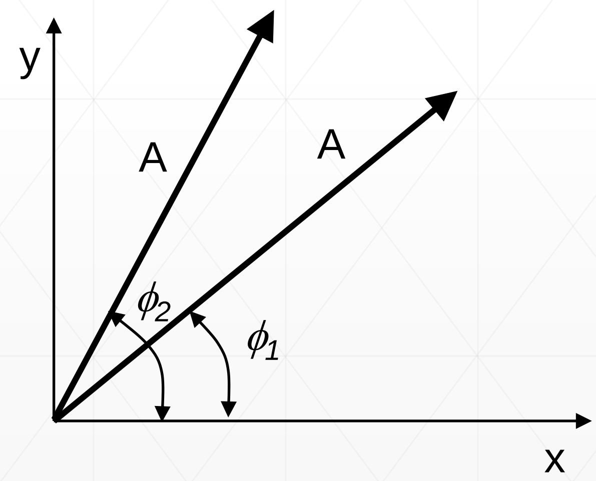


Rzut wektora A na kierunek OX:

$$x(t) = A\,cos(\omega_0\, t + \phi_0)$$

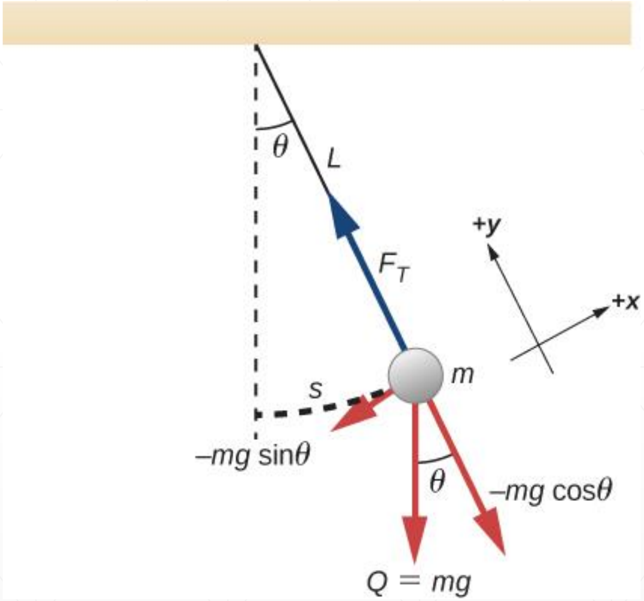
Metoda wykresów fazowych

Wektor o długości A równej amplitudzie drgań i kącie nachylenia do osi OX równym fazie drgań ϕ_1. Jego położenie w czasie ulega zmianie, bo $\phi = \omega_o t + \phi_0$



Przykład:
Wahadło matematyczne

Masa punktowa *m* zawieszona na nierozciągliwej, nieważkiej nici o długości L



$$I\varepsilon = M$$

$I = mL^2$ – moment bezwładności

$M = -Lmg\sin\theta$ – moment siły

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Lmg\sin\theta$$

drgania nie są harmoniczne

Dla małych kątów (θ<15°) sinθ~θ $\qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\theta = A\cos(\omega_o t + \phi_o) \qquad T_o = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Energia oscylatora harmonicznego

Rozpatrzmy energię żaby bujającej się na sprężynie

$$x = A\,cos(\omega_0\, t) \qquad \phi_0 = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\,\omega_0 sin(\omega_0\, t)$$

Energia kinetyczna

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o t)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E_k = \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega_o t)$$

Energia potencjalna

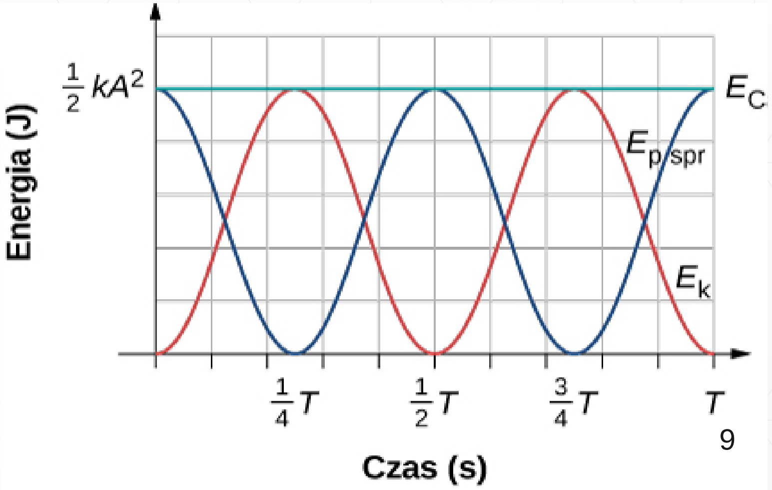
$$E_p = -\int_0^x F dx = \int_0^x kx\, dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_o t)$$

Energia całkowita

$$E_c = E_k + E_p$$

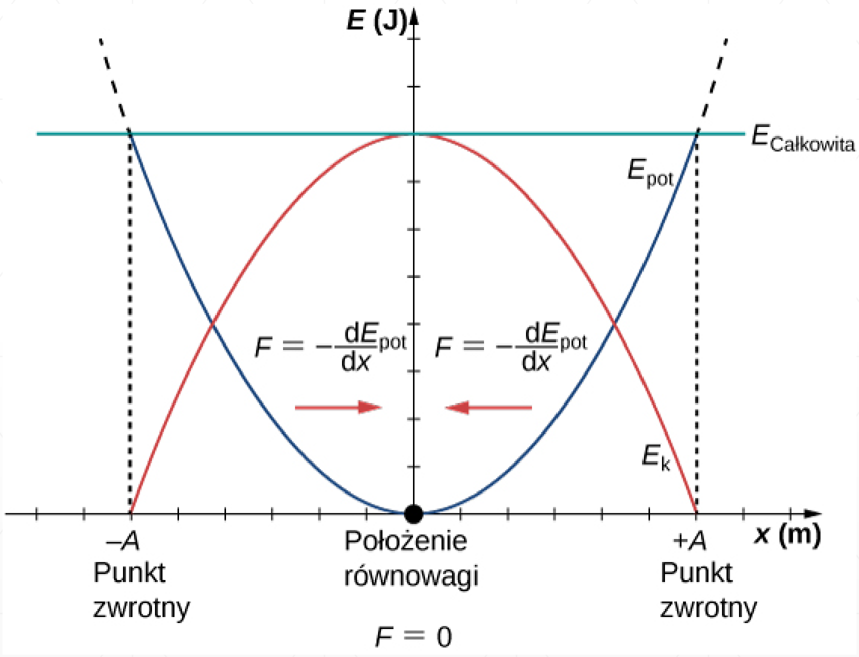
$$= \frac{kA^2}{2}(\sin^2(\omega_o t) + \cos^2(\omega_o t)) = \frac{kA^2}{2}$$

Energia kinetyczna zmienia się w energię potencjalną zmagazynowaną w sprężynie



Oscylacje względem położenia równowagi

Energia oscylatora w funkcji położenia klocka

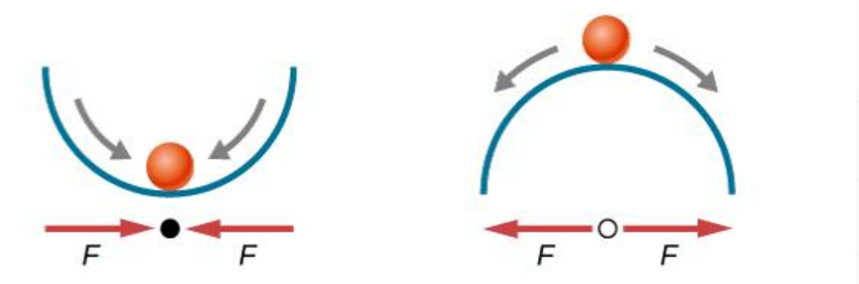


Położenie równowagi określa minimum energii potencjalnej.

Siła zwrotna F jest skierowana do położenia równowagi – równowaga trwała.

W przypadku równowagi nietrwałej drgania nie występują.

Kulka na powierzchni miski

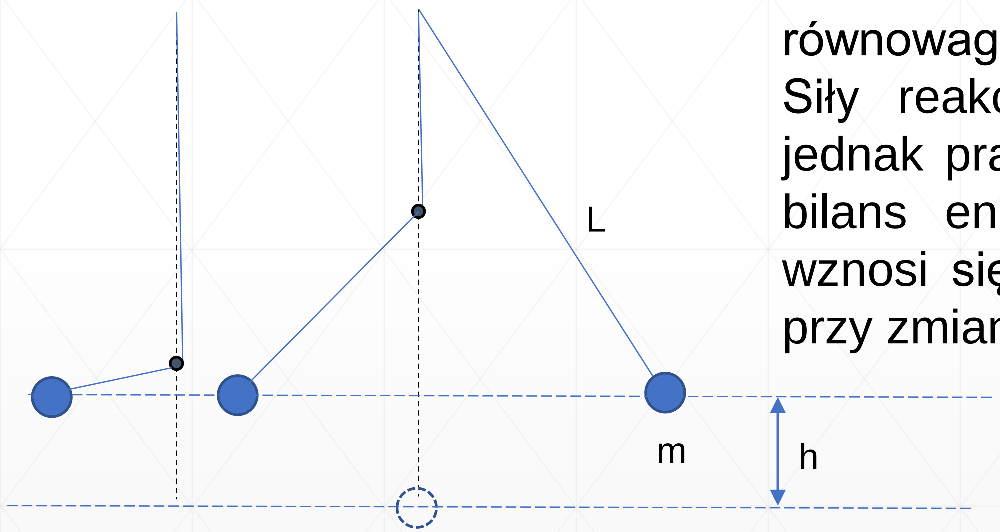


(a) Trwałe położenie równowagi (b) Nietrwałe położenie równowagi

Wahadło Galileusza

Wahadło matematyczne o masie **m** i długości **L** oraz gwóźdź w odległości **x** od osi obrotu

Gwóźdź wbity poniżej punktu zaczepienia wahadła powoduje, że jego długość ulega efektywnemu skróceniu przy przejściu położenia równowagi.
Siły reakcji więzów nie wykonują jednak pracy – nie mają wpływu na bilans energii. Wysokość na jaką wznosi się wahadło nie zmienia się przy zmianie długości nici:



$E_c = E_k + E_p = \text{const}$

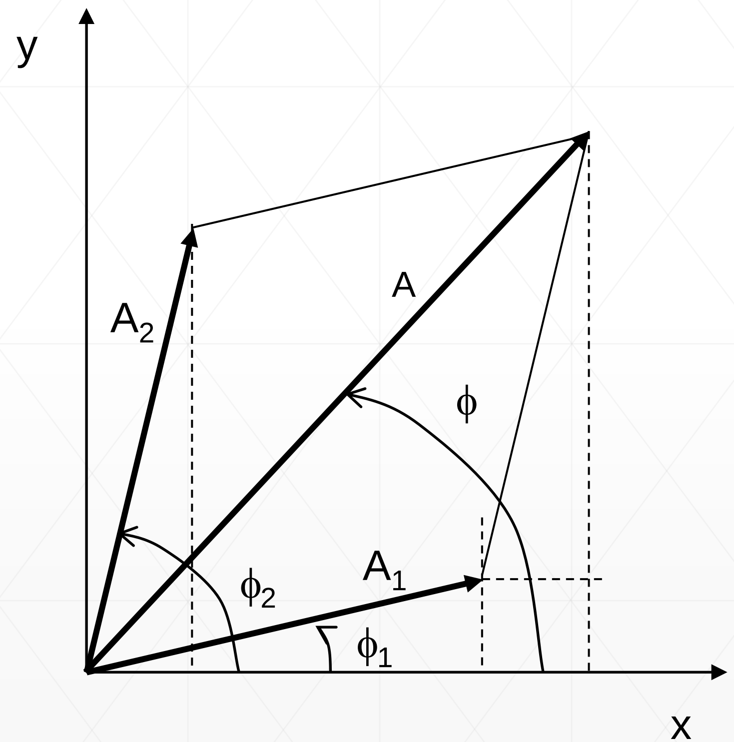
$E_k = 0 \qquad E_c = mgh$

Składanie drgań o jednakowych częstościach metoda wykresów fazowych

Rozpatrzmy dwa drgania o różnych amplitudach i przesunięciach fazowych:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_o t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_o t + \phi_2)$$



W wyniku superpozycji otrzymujemy drganie o amplitudzie A i przesunięciu fazowym ϕ:

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_o t + \phi)$$

Amplitudę określamy z prawa cosinusów:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\phi_2 - \phi_1)]$$

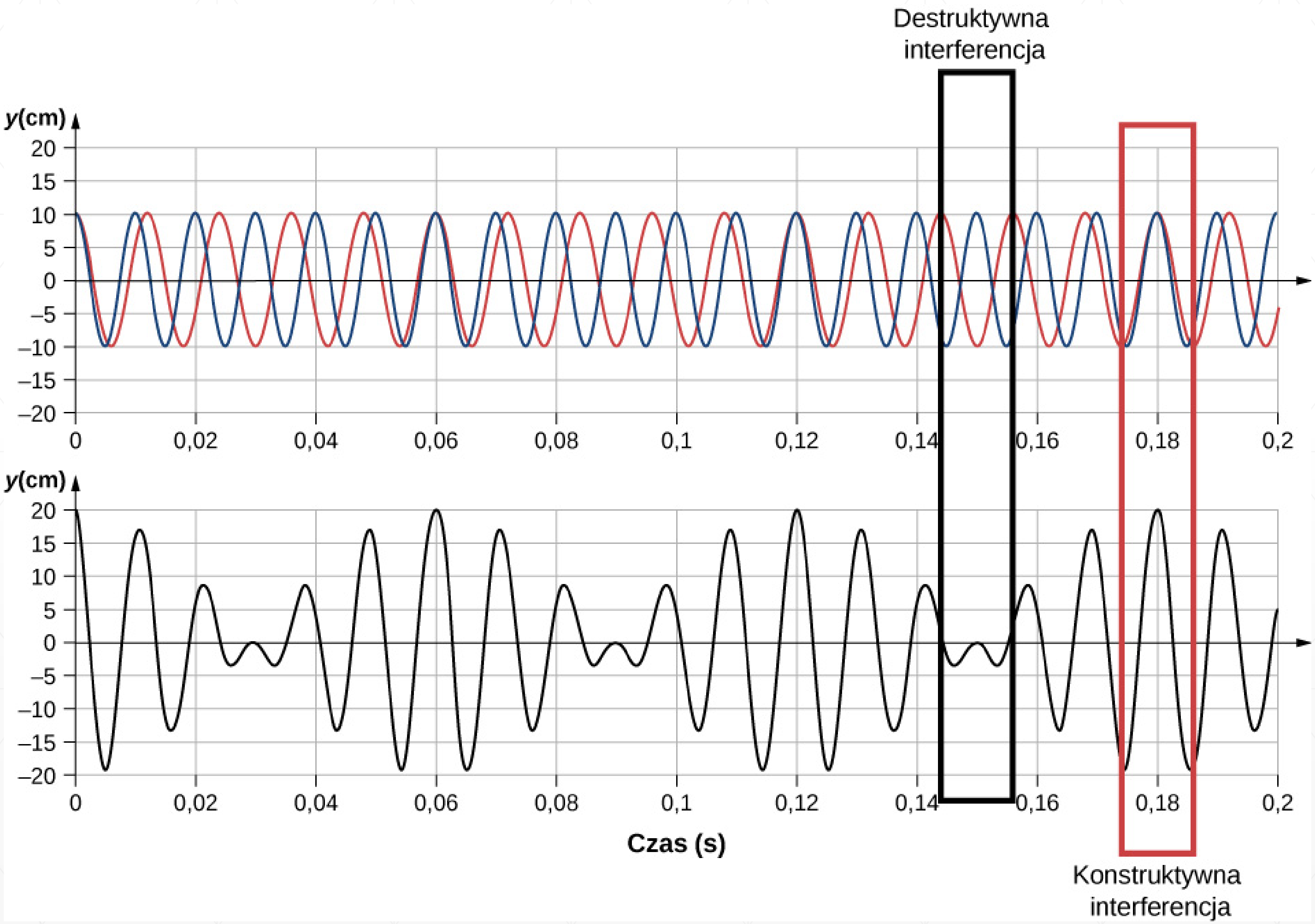
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

Przesunięcie fazowe z tangensa kąta:

$$tg\phi = \frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}$$

Dudnienia

złożenie dwóch drgań równoległych nieznacznie różniących się częstościami



$$x_1 = A\cos\omega_1 t$$
$$x_2 = A\cos\omega_2 t$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t)$$

$$x = 2A\cos(\tfrac{1}{2}\omega_{dud}\, t)\cos(\omega_{śr}\, t)$$

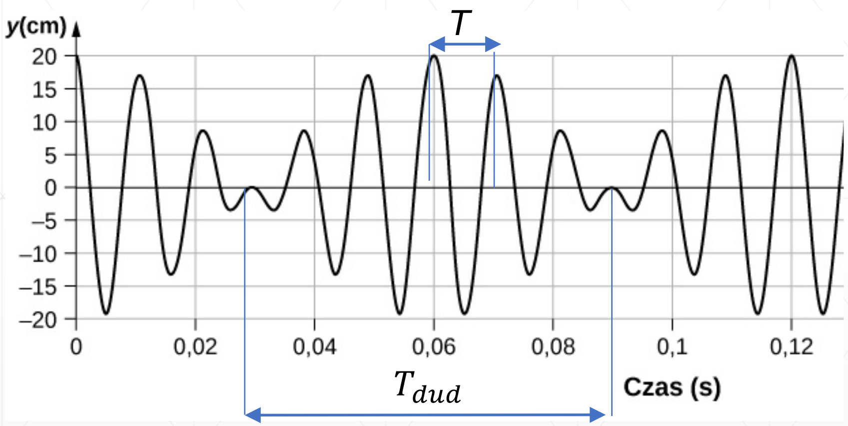
$$\omega_{śr} = \tfrac{1}{2}|\omega_1 + \omega_2|$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{śr}}$$

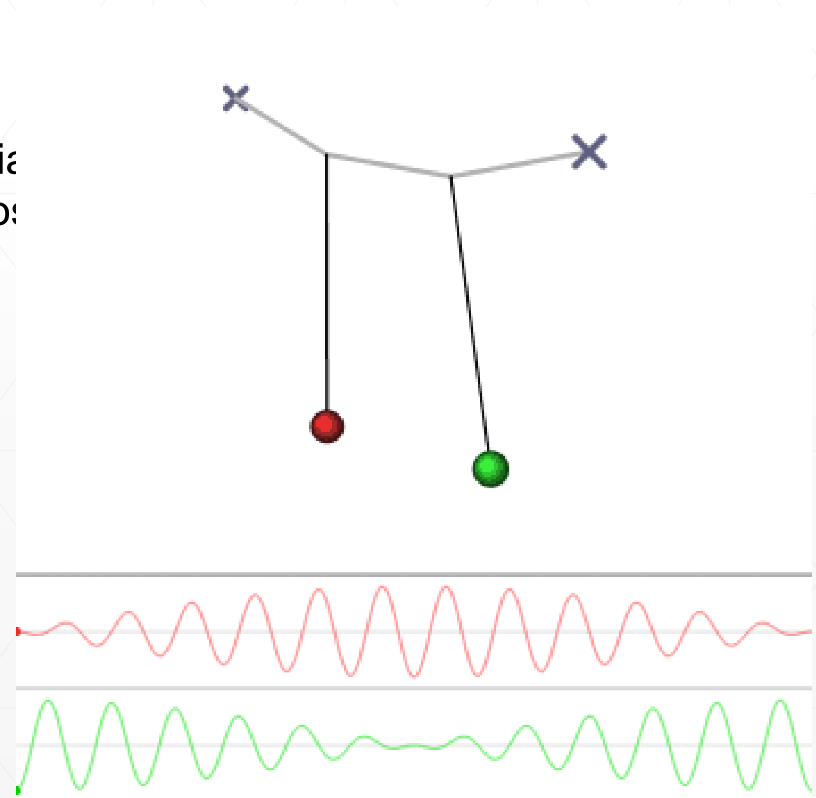
$$A_{dud} = \left|2A\cos(\frac{1}{2}\omega_{dud}\, t)\right|$$

$$\omega_{dud} = |\omega_2 - \omega_1|$$

$$T_{dud} = \frac{2\pi}{\omega_{dud}}$$



drgania
częstos



Składanie drgań wzajemnie prostopadłych

o jednakowych częstościach i różnych fazach

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{x}{A} = \cos\omega t \quad ; \quad \frac{y}{B} = \cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi$$

$$\sin\omega t = \sqrt{1-(\cos\omega t)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\phi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\phi$$

dla $\phi = 0$

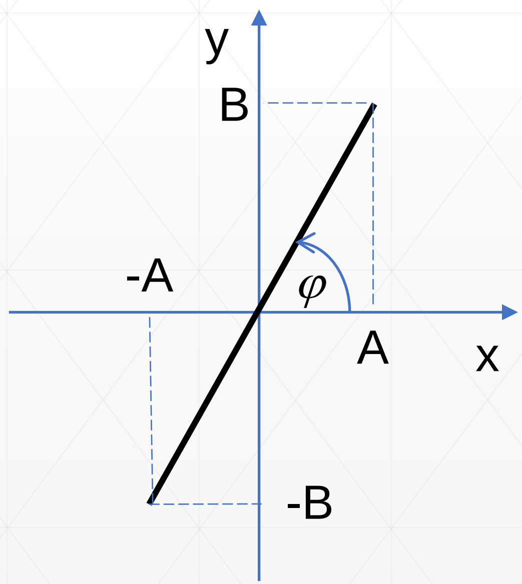
$$\cos\phi = 1\,,\ \sin\phi = 0$$

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

$$y = \frac{B}{A}x$$

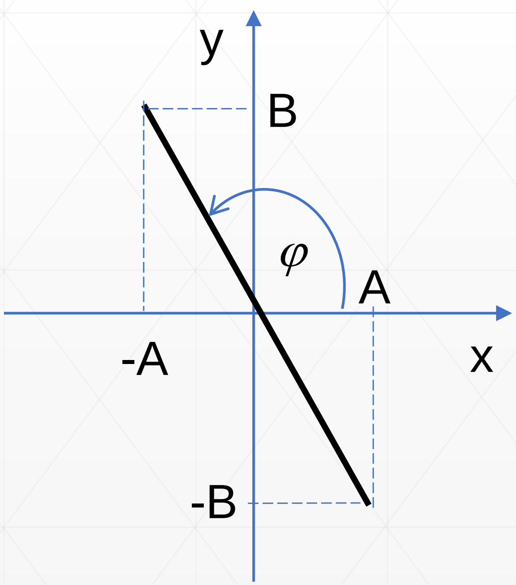
równanie prostej



dla $\phi = \pi$

$$\cos\phi = -1\,,\ \sin\phi = 0$$

$$y = -\frac{B}{A}x$$



DF-5,6

Składanie drgań wzajemnie prostopadłych

o jednakowych częstościach i różnych fazach

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{x}{A} = \cos\omega t \quad ; \quad \frac{y}{B} = \cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi$$

$$\sin\omega t = \sqrt{1-(\cos\omega t)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\phi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\phi$$

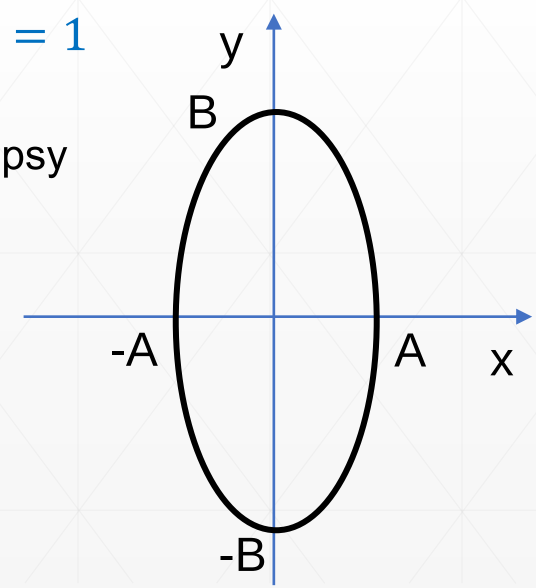
dla $\phi = \pi/2$

$$\cos\phi = 0\,,\ \sin\phi = 1$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

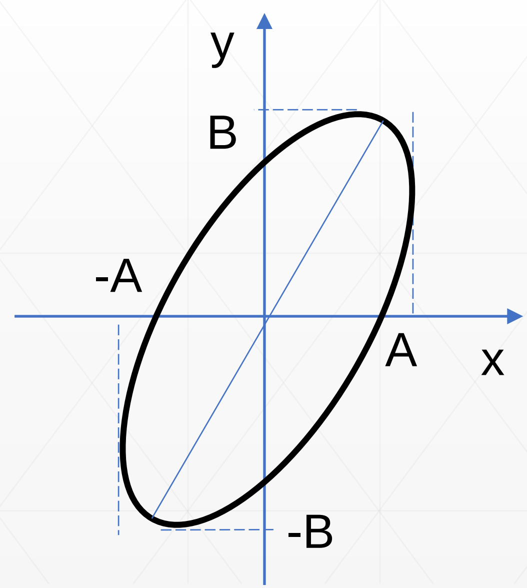
równanie elipsy

gdy A = B to koła



dla $\phi = \pi/4$

elipsa, ale o głównych osiach pod kątem do OX



Krzywe Lissajous

Składanie drgań prostopadłych o jednakowych amplitudach, ale o różnych częstościach i fazach

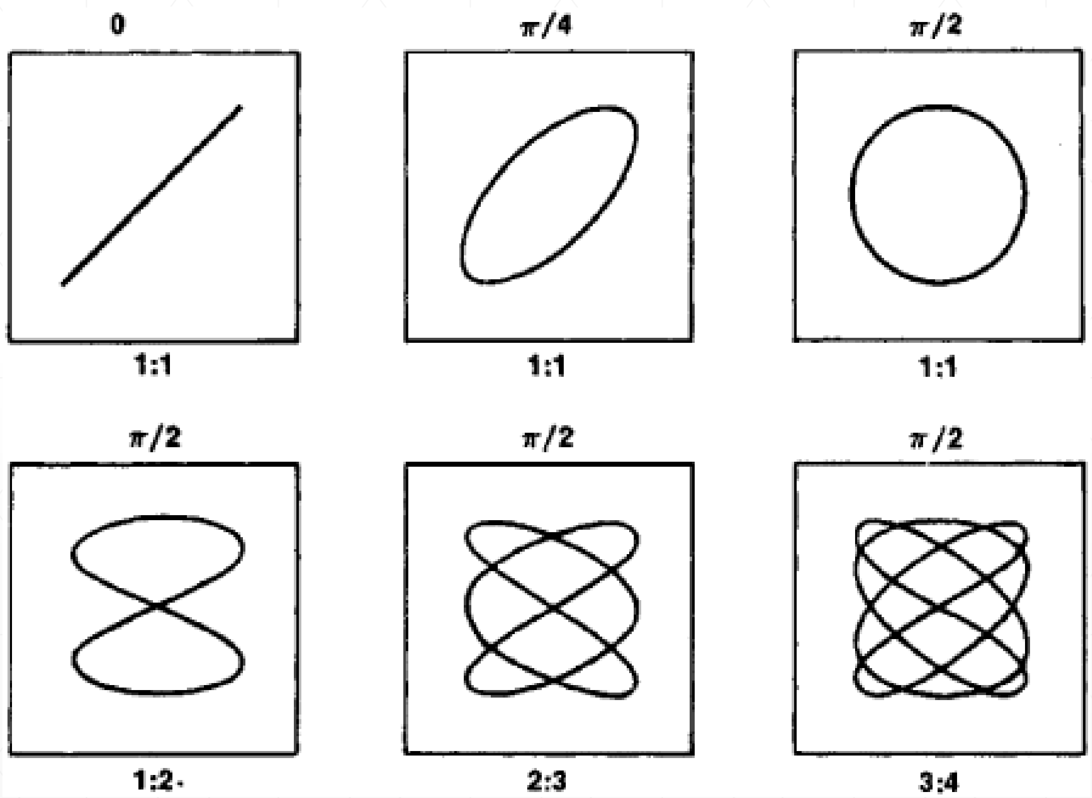
$$x = A\cos a\omega t$$
$$y = A\cos(b\,\omega\,t + \phi)$$

ϕ

b : a

ϕ

b : a



Ogólnie kształt krzywych Lissajous zależy od stosunku amplitud, częstości i przesunięć fazowych drgań.

Podsumowanie

- Drgania to procesy, w których dana wielkość fizyczna na przemian rośnie i maleje
- Drgania harmoniczne opisane są funkcją trygonometryczną np. $s(t) = A\, sin(\omega_0 t + \phi_0)$
- Parametry opisujące drgania (amplituda, faza początkowa, częstotliwość, faza, częstość kołowa, okres)
- Dla drgań harmonicznych przyspieszenie układu jest proporcjonalne do przemieszczenia i skierowane w kierunku położenia równowagi $m\, a = -k\, x$
- Dla drgań swobodnych energia kinetyczną zamienia się w energię potencjalną a ich suma pozostaje stała
- Jak składamy drgania:
  - o jednakowych częstościach – metoda wykresów fazowych
  - równoległych o różnych częstościach (co to są dudnienia)
  - wzajemnie prostopadłych – krzywe Lissajousa