

12. Dynamika relatywistyczna

Mechanika relatywistyczna (OTW):

- dynamika relatywistyczna,
- relatywistyczna energia kinetyczna,
- energia całkowita,
- czasoprzestrzeń jako element ogólnej teorii względności,
- podstawy kosmologii.



Nowe spojrzenie na pęd

W mechanice klasycznej pęd ciała - $\vec{p} = m\vec{v}$

Prawo zachowania pędu najbardziej fundamentalne prawo fizyki.

Izolowany układ cząstek m_1, m_2, \dots, m_n , nie podlegający działaniu sił zewnętrznych, będzie zachowywał się w czasie i przestrzeni w taki sposób, że:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

Z punktu widzenia teorii względności według obserwatorów w różnych inercjalnych układach odniesienia całkowity klasyczny pęd układu cząstek nie będzie zachowany. Aby spełnić zasadę zachowania pędu należy zmodyfikować definicję pędu.

Rozważmy cząstkę poruszającą się ze stałą prędkością v w dodatnim kierunku osi x :

$$p = mv = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad - \quad \text{pęd nierelatywistyczny}$$

gdzie Δx oznacza odległość przebytą w czasie Δt

Wprowadźmy inną definicję pędu

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta \tau}$$

gdzie $\Delta \tau$ oznacza czas mierzony w układzie w którym cząstka spoczywa

Zgodnie z dylatacją czasu $\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$ odstęp czasu w układzie poruszającym się jest dłuższy od czasu własnego $\Delta \tau$, czyli

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta \tau} = \gamma m \frac{\Delta x}{\Delta t} = \gamma m v$$

Różnica w obu definicjach to obecność współczynnika Lorentza γ

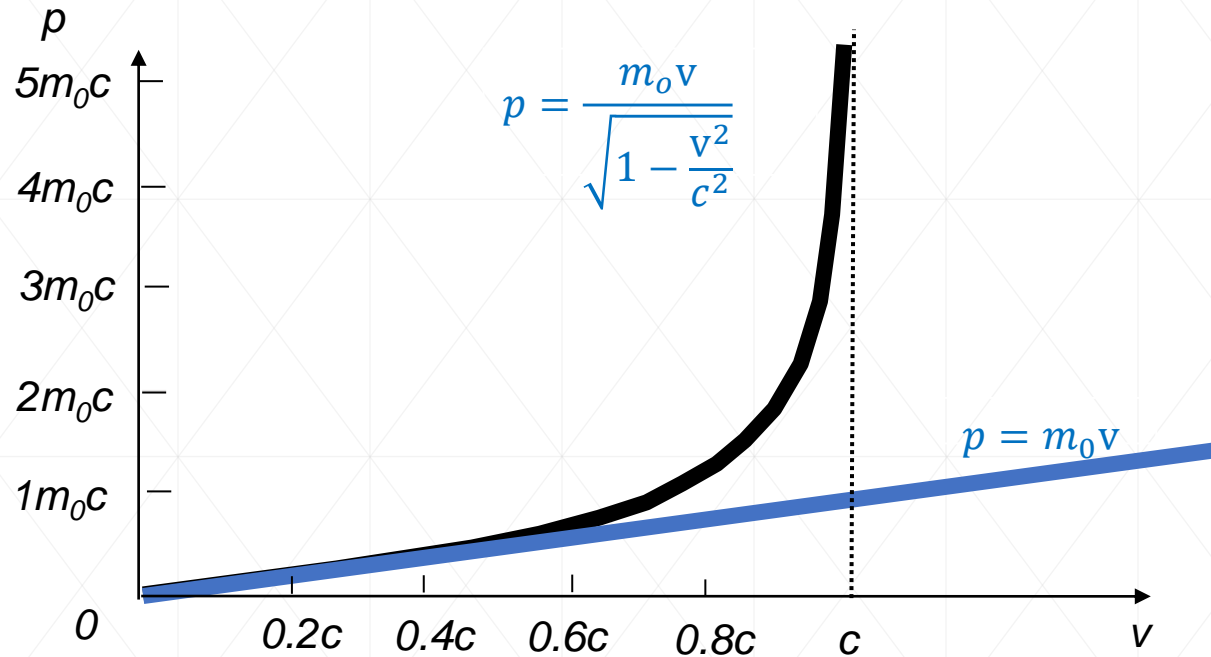
Wprowadza się zamiast m oznaczenie m_0 masy ciała mierzonej w układzie w którym ono spoczywa i nosi nazwę **masy spoczynkowej**.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma m_0$$

Masa ciała nie jest zatem w ogólności stała ani taka sama dla wszystkich obserwatorów, ale jest wielkością która:

- zależy od układu odniesienia z jakiego jest obserwowana,
- jest równa m_0 kiedy ciało jest w spoczynku w układzie odniesienia z którego jest obserwowane.

Właściwości czynnika Lorentza powodują, że masa staje się bardzo duża i w końcu zbliża się do nieskończoności, kiedy prędkość względna zbliża się do c .



Zgodnie ze wzorem na masę, wyrażenie relatywistyczne na pęd ma postać:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

a na zachowanie pędu układu izolowanego:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \gamma m_{oi} \vec{v}_i = \text{const}$$

Definicja siły

Chociaż prawa mechaniki klasycznej nie są na tyle uniwersalne, aby opisywały także zjawiska relatywistyczne, to drugie prawo Newtona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

jest na tyle ogólne, że stosuje się również w mechanice relatywistycznej. Zróżniczkowanie ww. równania prowadzi do wyrażenia:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \quad \text{gdzie } m \text{ oznacza teraz } \gamma m_0.$$

Wartość i kierunek siły relatywistycznej zależą od prędkości \vec{v} poruszającego się obserwatora.

W dalszej części wykładów wykażemy, że stacjonarne pole elektryczne o natężeniu \mathbf{E} jest „widziane” przez poruszającego się obserwatora jako pole magnetyczne o indukcji \mathbf{B} .

Energia relatywistyczna

Klasyczne wyrażenie na energię kinetyczną $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ jest słuszne dla $v \ll c$

Dla prędkości relatywistycznych:

$$E_k = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx = \int_0^p \frac{dx}{dt} dp = \int_0^v v dp = \int_0^v v d \left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \int_0^v v d \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

$$g'(x) dx = \frac{dg(x)}{dx} dx = dg(x)$$

Wykonując całkowanie przez części:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

$$\int f(v) \cdot dg(v) = f(v) \cdot g(v) - \int f'(v) g(v) dv$$

$$f(v) = v$$

$$g(v) = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_k = m_0 \left(\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Kinetyczna energia relatywistyczna

Całkując przez podstawianie $y = 1 - \frac{v^2}{c^2}$ $dy = -\frac{2v}{c^2} dv$ $\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = 2\sqrt{y}$

$$\int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{c^2}{2} \int_1^{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -c^2 [\sqrt{y}]_1^{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -c^2 \left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right)$$

zmiana granic
całkowania

$$E_k = m_0 \left(\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \int_0^v \frac{v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = m_0 \left(\frac{c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - c^2 \right) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

$$\frac{v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{v^2 + c^2 - v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E_k = mc^2 - m_0 c^2$$

Energia relatywistyczna

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

Stąd energia całkowita

$$E = mc^2 = E_k + m_0 c^2$$

Energia spoczynkowa

$$E_0 = m_0 c^2$$

Dla $m_0 = 1$ gram $E_0 = (10^{-3} kg) \left(3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2 = 9 \cdot 10^{13} J$
Co odpowiada jednej 20-kilotonowej bombie atomowej

Energia kinetyczna relatywistyczna i klasyczna

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

Rozwijając pierwszy wyraz w nawiasie na szereg dwumianowy o wykładniku ujemnym

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Otrzymamy na energię kinetyczną wzór, który dla małych prędkości w porównaniu z c przechodzi w znany wzór z dynamiki klasycznej $E_k = \frac{1}{2} m v^2$

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Pęd a energia kinetyczna

- energia kinetyczna

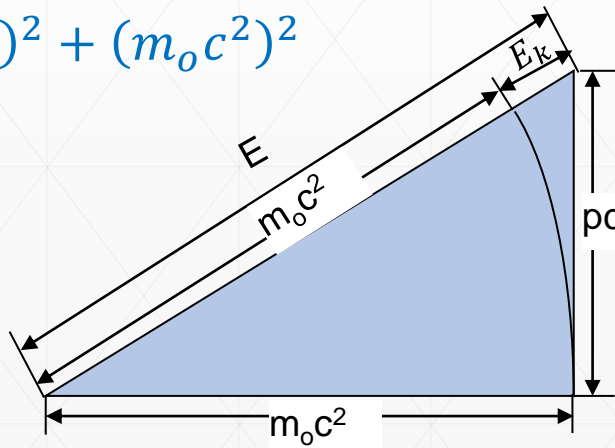
$$E_k = (m - m_0)c^2 \quad v \ll c \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

- równoważność masy i energii

$$E = E_0 + E_k \quad \rightarrow \quad E = m_0 c^2 + (m - m_0)c^2 \quad \rightarrow \quad E = mc^2$$

- pęd a energia cząstki

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$



$$E_k = \frac{p^2}{2m} \quad \text{Klasycznie}$$

Diagram
pomocniczy

Niesprężyste zderzenie 2 kul o masie m_o poruszających się przeciwnie z prędkością v



Energia kul przed zderzeniem

$$E = 2mc^2 = 2m_o c^2 + 2 \frac{m_o v^2}{2}$$

Po zderzeniu kule pozostają nieruchome

$$E = M_o c^2$$

Z zasady zachowania energii

$$(M_o - 2m_o)c^2 = m_o v^2$$

Ponieważ

$$m_o v^2 > 0 \Rightarrow M_o > 2m_o$$

$$\Delta m = M_o - 2m_o = \frac{E_k}{c^2}$$

energia kinetyczna E_k zamieniła się w energię wewnętrzną co spowodowało wzrost masy kul

W skali makro: $m = 0,1 \text{ kg}$,
 $v = 100 \text{ m/s}$, to $\Delta m = 1,1 \cdot 10^{-14} \text{ kg}$

Dla rozpadu cząstek elementarnych $v \sim c$, to $\Delta m \approx m$

Wybrane elementy ogólnej teorii względności

- ❑ Ogólna teoria względności uwzględnia także układy poruszające się ruchem przyspieszonym. U jej podstaw leży pogląd (za chwilę kwestię tę rozwinjemy), że skutki wywołane grawitacją i przyspieszeniem nie dadzą się rozróżnić.
- ❑ Dotychczas mówiliśmy, że prawa natury są takie same w układach inercjalnych czyli spoczywających lub poruszających się ruchem jednostajnym prostoliniowym. A co jeżeli poruszamy się ruchem jednostajnym prostoliniowym (w odizolowanym pojeździe) po wyboistej drodze? Prawa przyrody również się nie zmieniają.
- ❑ I właśnie to przekonanie Einsteina, że wszystkie prawa natury powinny wyglądać tak samo we wszystkich układach odniesienia – zarówno poruszających się jednostajnie jak i ruchem przyspieszonym – było głównym bodźcem do opracowania ogólnej teorii względności.

Czasoprzestrzeń jako element ogólnej teorii względności

Theory of Special Relativity - **STW** rozwinięta przez Einsteina (1905r.) dotyczy jedynie układów inercjalnych, natomiast Theory of General Relativity – **OTW** A. Einsteina (20.03.1916r.) uwzględnia także układy poruszające się ruchem przyspieszonym.

W (W-10) stwierdziliśmy, że dla każdego obiektu ważne pojęcia to – *grawitacja i bezwładność*, które wiążą się ściśle z masą obiektu, która jest miarą ilości materii w min zawartej.

- Pojęcie masy związane jest z *bezwładnością* czyli zdolnością ciał do przeciwstawiania się zmianom ich ruchu (**II zasada Newtona** - ciało dąży do zachowania stanu spoczynku), stąd określenie masy jako tzw. **masy bezwładnej**.
- Z drugiej strony *grawitacja* to oddziaływanie obserwowane jako przyciąganie mas w postaci siły ciężkości (**prawo grawitacji Newtona, 1687 r.** – siła przyciągania jest wprost proporcjonalna do iloczynu mas a odwrotnie proporcjonalnej do kwadratu ich odległości), stąd określenie masy jako tzw. **masy ciężkiej**.

Ale dlaczego **dwa „różne”** określenia **jednej fizycznej** masy ????

STW – prędkość światła jest prędkością graniczną daje fundamentalne stwierdzenie, iż przestrzeń i czas nie są absolutne. Ma to istotne dwie konsekwencje dotyczące założeń dla praw Newtona.

I – odnośnie założenia Newtona, że grawitacja jest siłą działającą **natychmiastowo**, co oznacza, że sygnał bądź energia przekazywane są natychmiast od masy m_1 do masy m_2 .

W ten sposób naruszone jest jedno z podstawowych założeń teorii względności, że żaden sygnał (żadna postać energii) nie może się rozchodzić z prędkością większą od prędkości światła.

II – odnośnie założenia Newtona, że możliwe jest **oddzielnie traktowanie** masy: występującej w prawie powszechnego ciężenia oraz masy z II zasady dynamiki (masa ciężka i masa bezwładna).

OTW – „uwalnia” nas z powyższych założeń Newtona opisując **geometrię czasoprzestrzeni** (**space-time geometry**) oraz to jak masy i przyspieszenie oddziałują z czasoprzestrzenią i jak ją zakłócają.

Grawitacja nie jest siłą działającą między dwoma ciałami, lecz jest wynikiem oddziaływania każdego ciała z efektami, jakie inne ciała wywierają na czasoprzestrzeń go otaczającą.

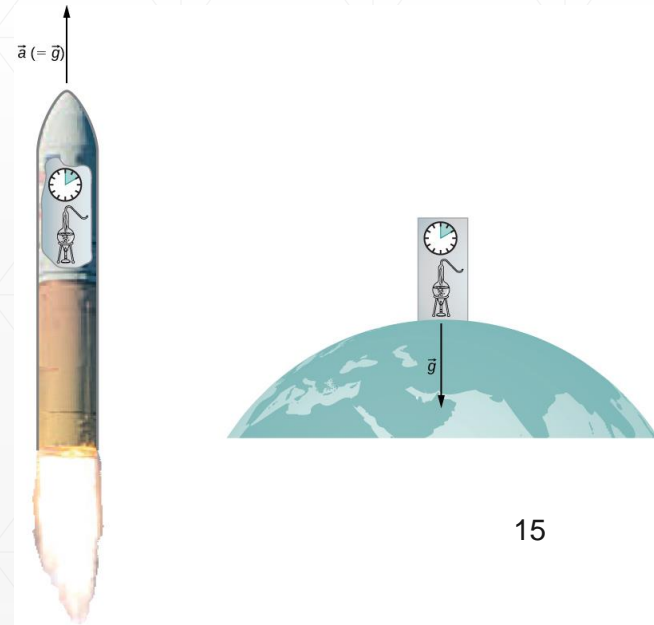
Zasada równoważności

Wyobraźmy sobie, że lecimy statkiem kosmicznym ze stałą prędkością względem Ziemi i gwiazd – w statku mamy stan nieważkości, wszystko może się swobodnie unosić, nie ma pojęcia „góra”, „dół”.

>>> **Włączamy silniki** >>> pojawiają się efekty podobne do grawitacji. Ściana przylegająca do silników naciska na wszystkie obiekty wewnątrz kabiny i staje się podłogą, natomiast przeciwległa staje się sufitem.

Gdyby przyspieszenie a osiągnęło wartość g to pasażerom wydawałoby się, że statek nie porusza się a stoi na powierzchni Ziemi.

Zasada równoważności głosi, że obserwacje czynione w przyspieszającym układzie odniesienia są nieodróżnialne od analogicznych obserwacji w zwykłym polu grawitacyjnym.



Zakrzywianie światła przez masę

Wyobraźmy sobie, że do statku kosmicznego poruszającego się ruchem przyspieszonym wpuścimy poziomo promień światła – co widzi obserwator:

- A) dla obserwatora spoza statku promień będzie się poruszał po linii prostej
- B) dla obserwatora wewnątrz światło porusza się po linii zakrzywionej w dół

Według Einsteina światło nie ma masy, ale ma energię -> pole grawitacyjne przyciąga energię świetlną, gdyż jest ona równoważna masie

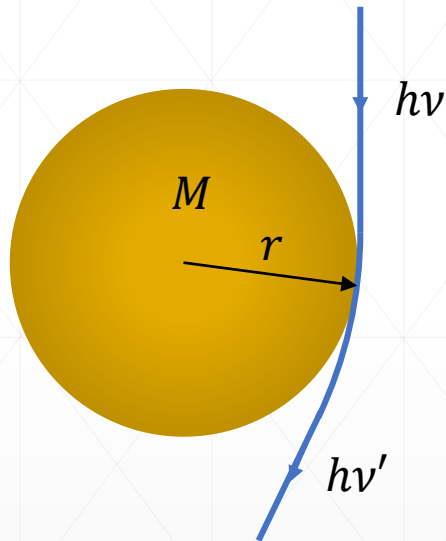
To był pierwszy krok do sformułowania ogólnej teorii względności:

- światło zakrzywia swój tor, gdy się porusza w zakrzywionej czasoprzestrzeni
- zakrzywienie przestrzeni związane jest z obecnością masy.

Einstein przewidział, że światło gwiazd przelatując blisko Słońca odchyła się o kąt równy 1,75 sekundy. (Pomiary takie przeprowadza się podczas każdego zaćmienia Słońca od 1919 r. – wykonuje się fotografie gwiazd i porównuje ich położenie z zarejestrowanym w nocy) → odchylenie jest zgodne z przewidywaniami.

Zakrzywienie światła przez masę

Z obserwacji astrofizycznych wiadomo, że foton (neutrino) przebiegając w pobliżu gwiazdy zakrzywia swój tor. Zakrzywienie to, w przypadku fotonu, wynika z oddziaływania grawitacyjnego fotonu z gwiazdą, czego następstwem jest zmiana jego częstości.



$$E = mc^2 = h\nu \longrightarrow m = \frac{h\nu}{c^2}$$

Energia całkowita fotonu oddziałującego z polem grawitacyjnym wynosi:

$$E = h\nu' = h\nu + E_p(r)$$

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMh\nu}{rc^2}$$

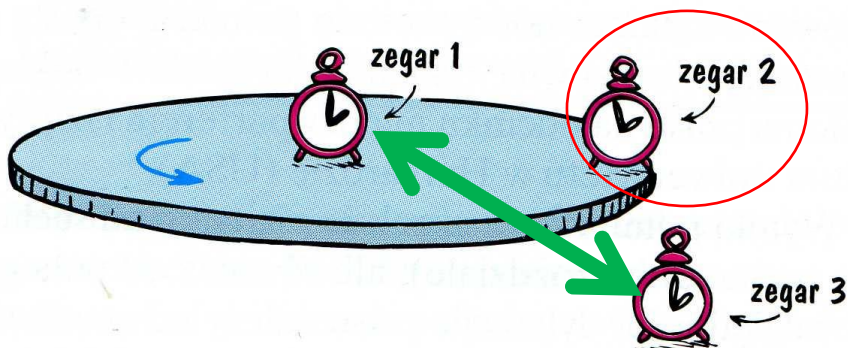
$$\frac{h\nu' - h\nu}{h\nu} = -\frac{GM}{rc^2}$$

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = -\frac{GM}{rc^2} = -2 \cdot 10^{-6} \quad \text{dla Słońca}$$

Następuje przesunięcie częstości fotonów ku czerwieni – częstość fotonów maleje.

Grawitacja i czas – grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni

Zgodnie z teorią względności grawitacja powoduje spowolnienie czasu.



Wyobraźmy sobie trzy zegary jak na rysunku obok:

- Zegar pierwszy i trzeci pokazują ten sam czas bo są nieruchome względem siebie.

- Zegar drugi zachowuje się inaczej – porusza się względem ziemi i dlatego jego czas płynie wolniej → czyli mimo że zegary 1 i 2 znajdują się w tym samym układzie odniesienia ich wskazania nie są zgodne.

Na zegar 2 (brzegowy) działa siła odśrodkowa i to ona jest powodem wolniejszego chodu tego zegara

Grawitacja i czas – grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni

Korzystając z zasady równoważności, w myśl której każdy efekt związany z przyspieszeniem ma swój odpowiednik grawitacyjny – musimy dojść do wniosku, że **ruch w kierunku zgodnym z polem grawitacyjnym musi powodować spowolnienie czasu.**

Dotyczy to wszystkich zegarów: fizycznych, chemicznych i biologicznych.

- Urzędniczka pracująca na parterze wieżowca starzeje się wolniej jak jej bliźniaczka pracująca na ostatnim piętrze.
- Dotyczy to również atomów – atom na Słońcu powinien emitować światło o niższej częstotliwości jak taki sam na Ziemi → **grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni**

W tym miejscu należy podkreślić, że czas jest względny zarówno w szczególnej jak i ogólnej teorii względności. Ale ... **w obu teoriach nie jest możliwe wydłużenie własnego życia.**

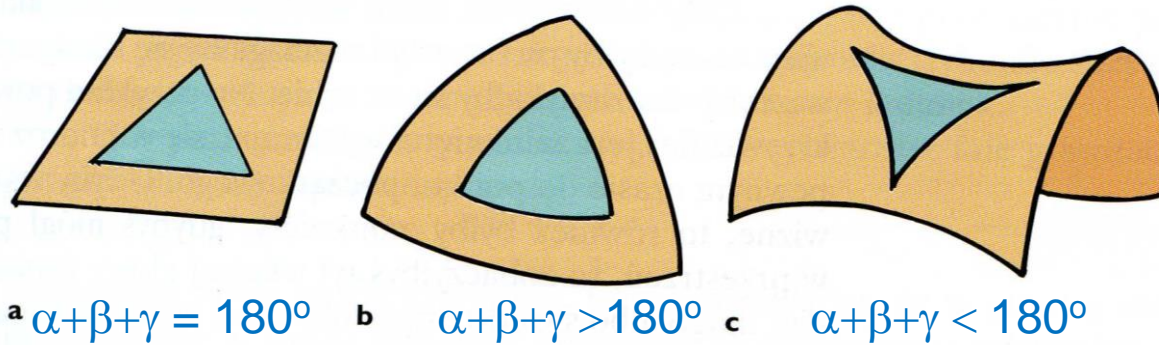
Długość życia innych ludzi może ci się wydawać większa, o ile podróżują z dużymi prędkościami, lub gdy znajdują się w silnym polu grawitacyjnym.

Długość naszego życia może się zwiększyć ale tylko z punktu widzenia innych ludzi.

Zmiany czasu są zawsze postrzegane przez innych

Grawitacja, przestrzeń i nowa geometria

Popularne prawa geometrii euklidesowej [takie jak stosunek obwodu koła do jego średnicy jest zawsze równy π , suma kątów w trójkącie równa jest 180° ...] mają zastosowanie do różnych figur rysowanych na kartce papieru. Prawa te odnoszą się do przestrzeni płaskiej. Jeśli takie figury narysujemy na powierzchni zakrzywionej to ...



Matematyczny opis tego typu geometrii (tzw. **geometrii nieeuklidesowych**) podał B. Reimanna (1854r.), tzw. **geometrie reimannowskie** - wielowymiarowe uogólnienia klasyfikacji geometrii różniczkowej na dwuwymiarowych powierzchniach (zapoczątkowanej przez C.F. Gaussa).

Interwał przestrzenny:

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu}^N g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

tensor metryczny

Promienie świetlne przebiegające między trzema planetami wyznaczają trójkąt. Ponieważ w pobliżu Słońca ulegają zakrzywieniu, suma kątów w tym trójkącie jest większa od 180°

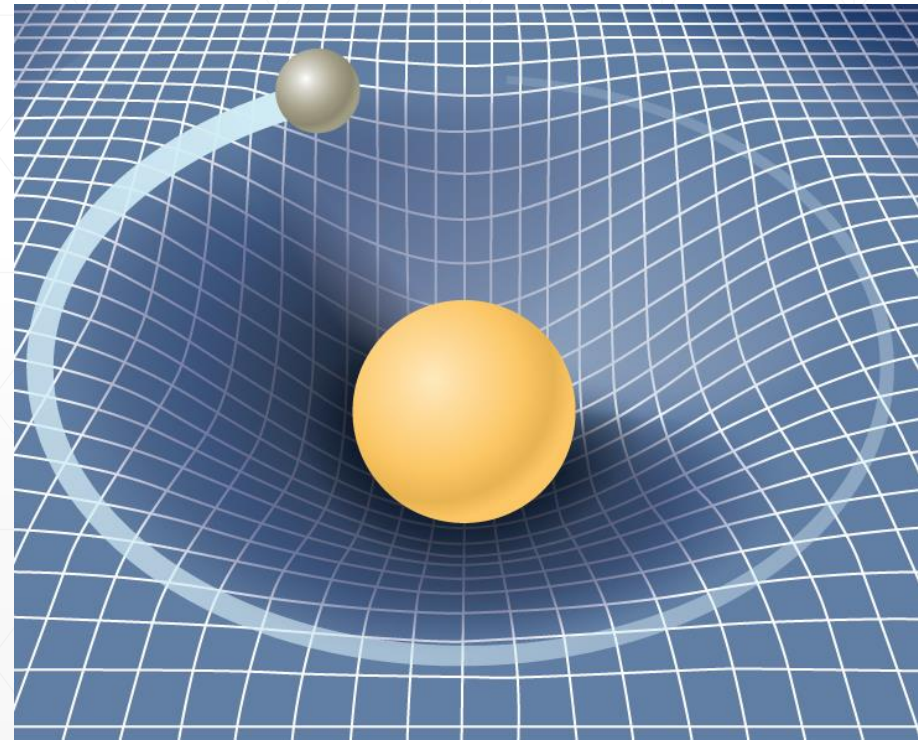
Geometryczne podejście do teorii grawitacji

Geometria euklidesowa - przestrzeń jest płaska (występuje w prawach Newtona). Jej cechy: linia prosta jest najkrótszą odległością pomiędzy dwoma punktami, suma kątów każdego trójkąta wynosi 180 stopni, linie równoległe nigdy się nie przecinają.

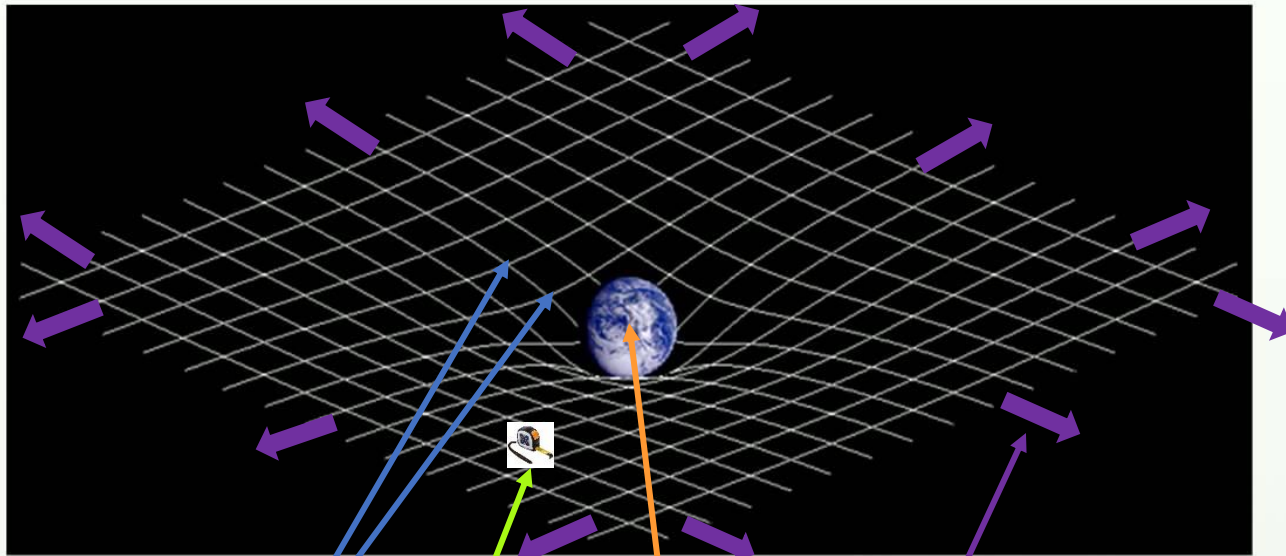
OTW kwestionuje te koncepcję. Tylko pusta przestrzeń jest płaska (euklidesowa). Obecność masy lub energii, zakrzywia czas i przestrzeń wokół niej.

Ruch każdego ciała posiadającego masę jest reakcją na zakrzywienie czasoprzestrzeni.

Teoria grawitacji Einsteina wyraża się przez równanie tensorowe mówiące w jaki sposób masa zakrzywia czasoprzestrzeń wokół niej.



Einstein field equations



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Spacetime_curvature.png

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

opisuje jak zmienia się krzywizna z pkt. do pkt.

opisuje jak liczyć odległość przy danej krzywiznie w pkt.

źródło zakrzywienia czasoprzestrzeni

dodany przez Einsteina dla zachowania stabilności wszechświata

$R_{\mu\nu}$ - tensor krzywizny Ricci

R - skalar krzywizny

$g_{\mu\nu}$ tensor metryczny

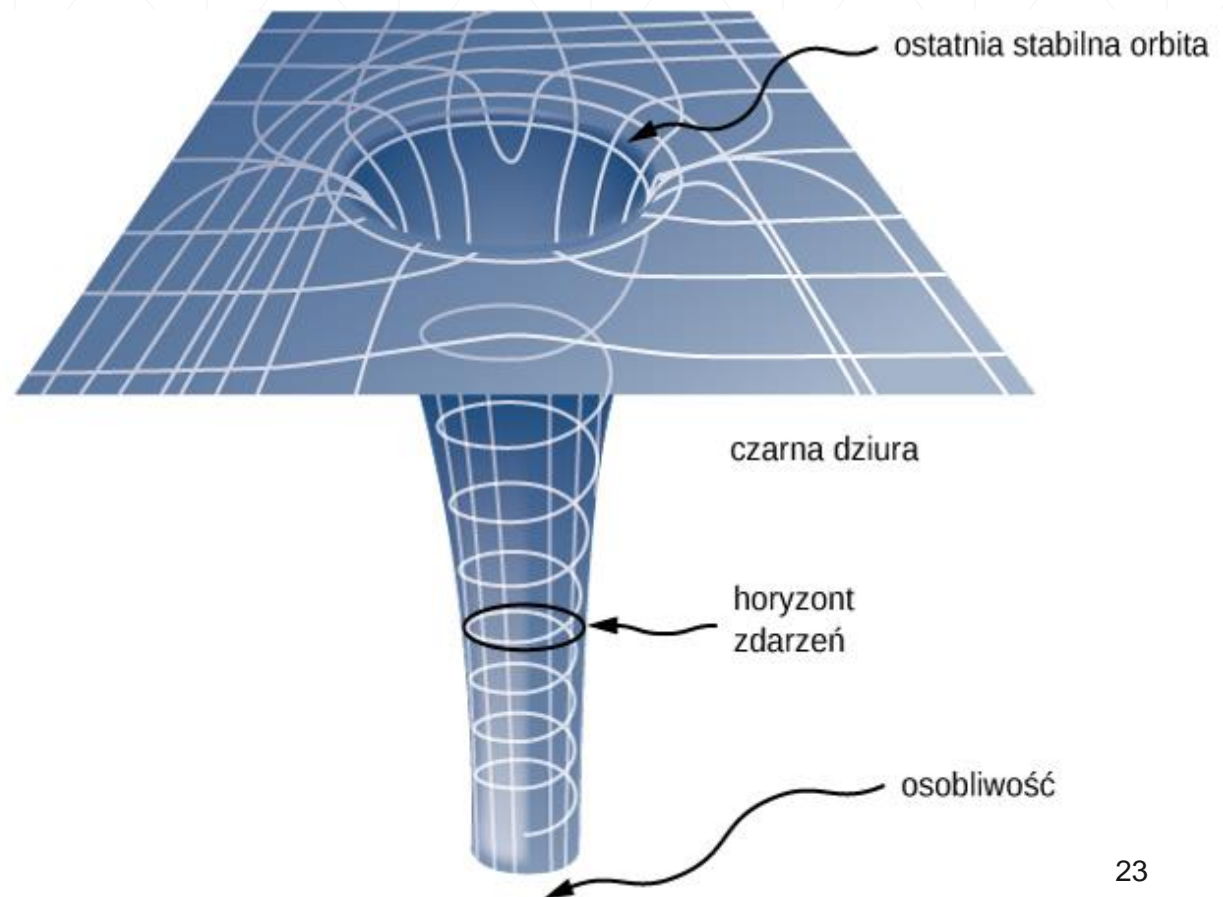
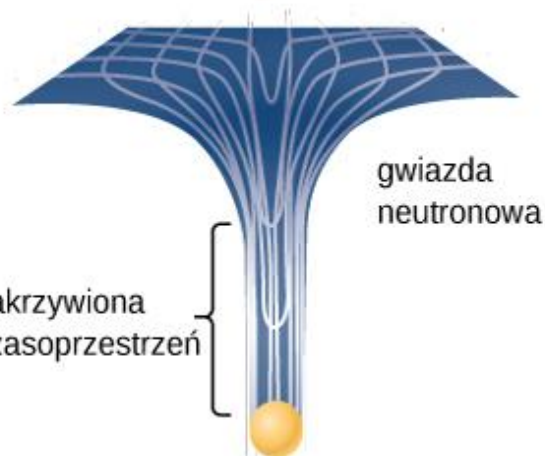
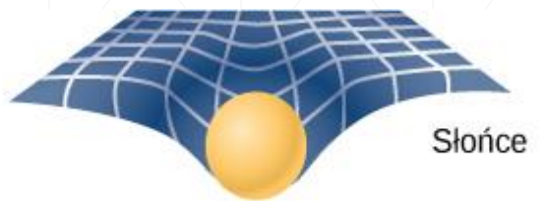
G - stała grawitacji Newtona

$T_{\mu\nu}$ - tensor energii-pędu

Λ - stała kosmologiczna

Geometryczne podejście do teorii grawitacji

Czarne dziury – jeśli obiekt jest dostatecznie gęsty, to zapada się pod wpływem własnej grawitacji i jest otoczony **horyzontem zdarzeń**. Cokolwiek znajdzie się w jego wnętrzu, nawet światło, nie może uciec spod wpływu przyciągania grawitacyjnego czarnej dziury (Karl Schwarzschild – 1916).



Ogólna teoria względności odgrywa dużą rolę w dziale astrofizyki zwanej kosmologią – nauce o powstaniu, rozmiarach i budowie Wszechświata

Wyjaśnia ona takie zjawiska jak:

- zwiększenie długości fali przy emitowaniu światła przez ciała o dużej masie,
- zakrzywienie promienia świetlnego przechodzącego w pobliżu powierzchni Słońca w kierunku środka Słońca,
- czy też mechanizm powstawania tzw. "czarnych dziur".

Natomiast w pełni poprawnie za pomocą teorii grawitacji Newtona opisujemy:

- oddziaływania ciał w układzie słonecznym
- orbity komet i asteroidów
- istnienie innych nie odkrytych planet
- tory sond wysyłanych w kierunku Księżyca i Marsa

Pole grawitacyjne tych ciał jest bardzo słabe i czasoprzestrzeń w ich pobliżu jest prawie płaska.

Podsumowanie:

Mechanika relatywistyczna

- masa $m = \gamma m_0$ zależy od układu odniesienia z jakiego jest obserwowana, jest równa m_0 w układzie w którym ciało jest w spoczynku;
- pęd $\mathbf{p} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ w odróżnieniu od ujęcia klasycznego rośnie nieliniowo z prędkością;
- siła $\mathbf{F} = m d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} dm/dt$ – dla prędkości zbliżającego się do prędkości światła staje się nieskończenie wielka;
- energia kinetyczna $E_k = (m - m_0)c^2$
- energia całkowita $E = mc^2$ – nie zawiera energii potencjalnej i jest równoważna masie

Ogólna teoria względności – teoria grawitacji:

- zgodnie z **zasadą równoważności**, obserwacje czynione w przyspieszającym układzie odniesienia są nieodróżnialne od analogicznych obserwacji w polu grawitacyjnym,
- masa i przyspieszenie zakrzywiają czasoprzestrzeń i w pewnych warunkach są one nierozróżnialne,
- zakrzywienie światła przez masę - wg. Einsteina światło nie ma masy, ale ma energię -> pole grawitacyjne przyciąga energię świetlną, gdyż jest ona równoważna masie,
- grawitacja jest wynikiem zakrzywienia czasoprzestrzeni wywołanym lokalnym rozkładem energii (mas).