10. Pola zachowawcze na przykładzie pola grawitacyjnego

- pola sił,
- potencjał,
- energia potencjalna,
- pole grawitacyjne,
- I i II prędkość kosmiczna,
- prawa Keplera.

Definicja pola

- **Pole matematyczne** – to funkcja, która każdemu punktowi przestrzeni przypisuje daną wielkość:
  - przestrzenny rozkład liczb (**pole skalarne**)
  - rozkład wektora (**pole wektorowe**)
- **Pole fizyczne** – przestrzenny rozkład wielkości fizycznej
  - w przestrzeni określone jest pewne pole, jeżeli każdemu punktowi przestrzeni przypisano pewną wielkość fizyczną
  - pola matematyczne służą do opisu wielkości fizycznych
  - **pola fizyczne skalarne,** np. pole termiczne
  - **pola fizyczne wektorowe,** np. pole grawitacyjne
- Analiza pola sprowadza się do badania rozkładu pola, określenia wielkości charakteryzujących pole oraz formułowania związków miedzy nimi

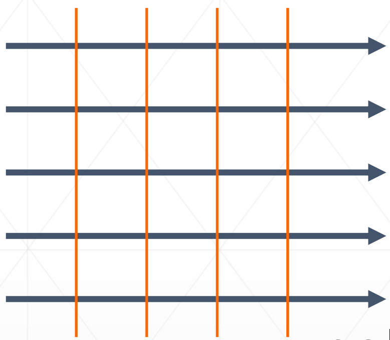
Geometria pola

- pole przestrzenne
- pole płaskie
  - skalarne – określone dla punktów płaszczyzny
  - wektorowe – wektory leżą w jednej płaszczyźnie
- pole centralne – kierunki wektorów przechodzą przez centrum (środek), a wartości zależą od odległości
  - dośrodkowe
  - sferyczne
  - kołowe
- pola źródłowe lub bezźródłowe
- pola wirowe lub bezwirowe

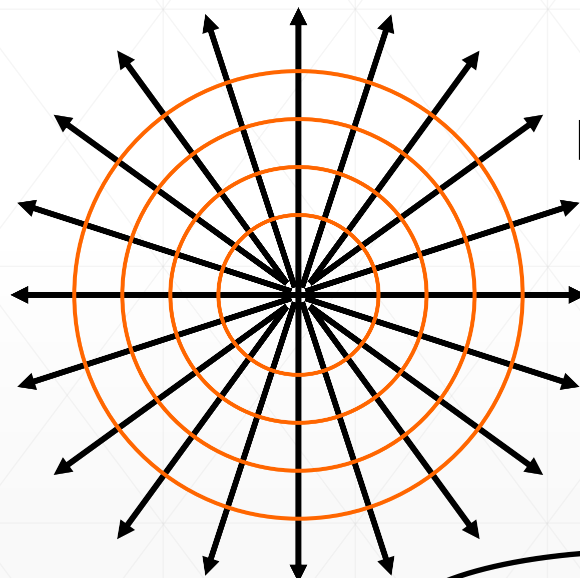
Wielkości charakteryzujące pole: izopowierzchnie i linie pola

Izopowierzchniami nazywamy powierzchnie stałych wartości funkcji pola (sił, natężeń)

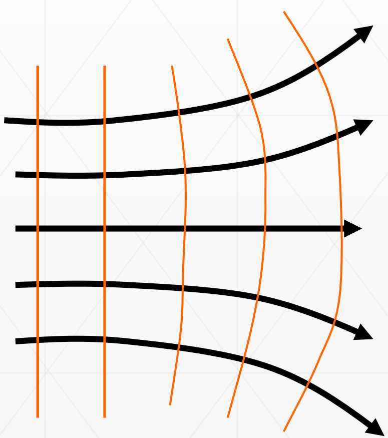
Liniami pola wektorowego nazywamy linie wyznaczające kierunek pola (wektor siły jest zawsze styczny do linii pola)



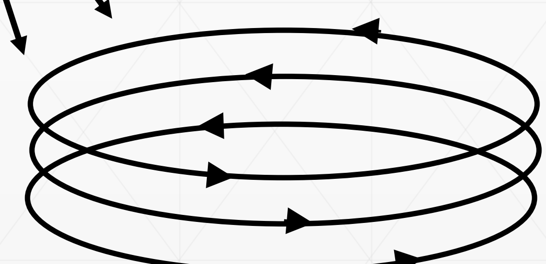
pole jednorodne



pole centralne



pole niejednorodne



pole wirowe

Strumień pola „ilość” linii sił przechodzących przez daną powierzchnię prostopadle do niej

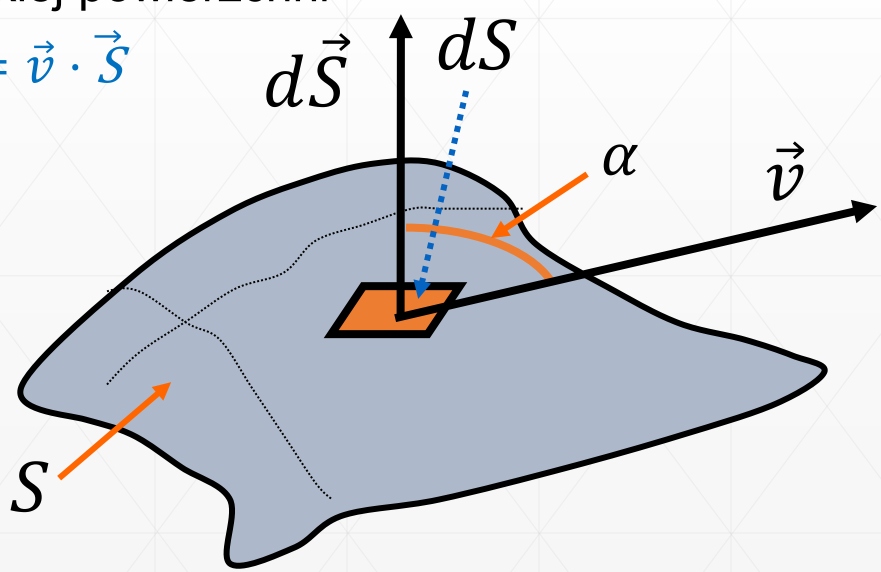
Strumień wielkości wektorowej $\vec{v}$ przez powierzchnię S jest równy sumie strumieni $d\Phi$ przez elementy powierzchni $d\vec{S}$ będące iloczynem składowej normalnej wektora $\vec{v}$ przez pole powierzchni dS

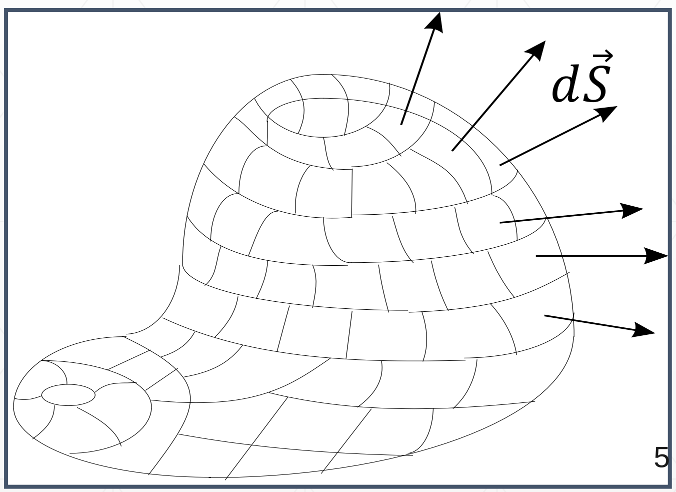
$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{S} = v \cos\alpha \, dS \qquad \Phi = \sum_{i=1}^{n} d\Phi_i = \int_S d\Phi$$

$$\Phi = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

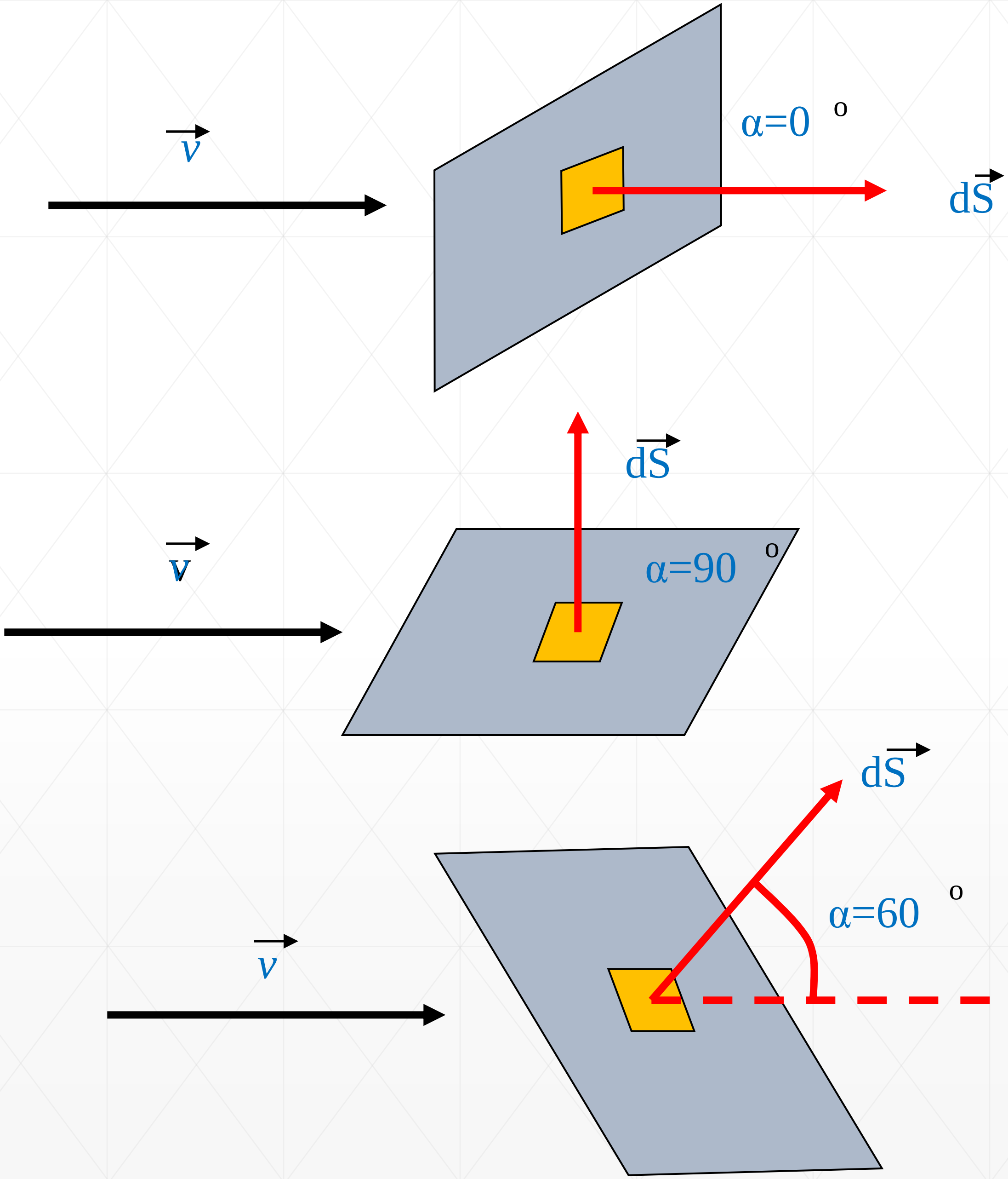
Dla pola jednorodnego
i płaskiej powierzchni

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$





$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$



$$\boxed{\Phi = v\,S}$$

$$\boxed{\Phi = 0}$$

$$\boxed{\Phi = \tfrac{1}{2}\,v\,S}$$

Pole potencjalne

Potencjał skalarny to pole skalarne określające dane pole wektorowe

- Jeżeli dla danego pola wektorowego $\vec{F}$ istnieje pole skalarne $V(\vec{r})$ takie, że w każdym punkcie $\vec{r}$ jego gradient jest równy wektorowi danego pola ze zmienionym zwrotem to pole $\vec{F}$ nazywamy polem potencjalnym, a $V(\vec{r})$ jego potencjałem.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad}\; V(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right)$$

- gdzie ∇ - operator Nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

- Pole wektorowe posiada potencjał, jeżeli jego rotacja zeruje się w każdym punkcie $\vec{r}$ tego pola (pole bezwirowe)

$$rot\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

- Dywergencja pola (rozbieżność, źródłowość)

$$div\,\vec{F}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rodzaje pól siłowych

Pole siłowe – przestrzeń, w której występuje siła $\vec{F} = \vec{f}(\vec{r}, t)$ charakteryzująca dane oddziaływanie.

- pola stacjonarne (np. grawitacyjne) - pola niezależne od czasu - $\vec{F} = \vec{f}(\vec{r})$
- pola niestacjonarne (np. elektromagnetyczne) – pola zależne od czasu
- pole potencjalne – jeśli istnieje potencjał skalarny – $(\nabla \times \vec{F}(\vec{r}) = 0)$
- pole zachowawcze, gdy potencjał skalarny nie zależy od czasu i pole jest centralne
  - pole grawitacyjne
  - pole sprężystości
  - pole elektrostatyczne
- dla zachowawczych pól siłowych potencjałem skalarnym jest energia potencjalna $V(\vec{r}) = U(\vec{r})$

Siły zachowawcze

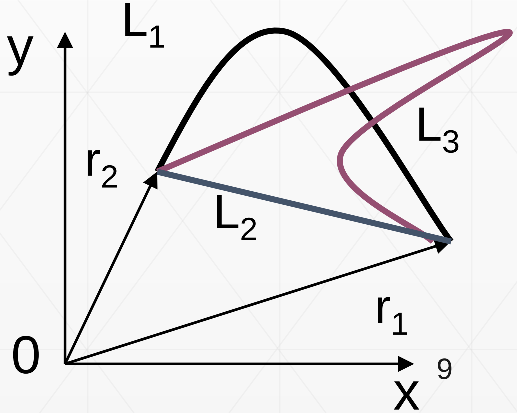
Siły zachowawcze

- zależą tylko od położenia punktu
- mogą być reprezentowane przez funkcję energii potencjalnej

$$U(r) = -\int_{r_{zer}}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dla sił zachowawczych

- praca sił pomiędzy dwoma punktami **nie zależy** od wyboru drogi, a tylko od położenia końcowego i początkowego punktu
- praca po drodze zamkniętej jest równa zero
- pole w którym działają siły zachowawcze nazywamy **polem zachowawczym**



Podział pól siłowych

Podział wynika z czterech fundamentalnych oddziaływań siłowych:

- *Oddziaływania grawitacyjnego,*
- *Oddziaływania elektromagnetycznego,*
- *Słabego oddziaływania jądrowego,*
- *Silnego oddziaływania jądrowego*

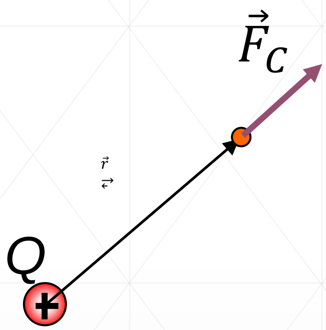
- pola grawitacyjne
  - źródła i obiekty – ciała posiadające masę (m)
- pola elektromagnetyczne
  - ładunki w spoczynku (q)– pola elektryczne
  - ładunki w ruchu (q)– pola magnetyczne
- pola jądrowe
  - źródła – cząstki jądrowe (elementarne) podlegające oddziaływaniom silnym lub słabym (q)
- miarą ilościową pola siłowego jest jego natężenie

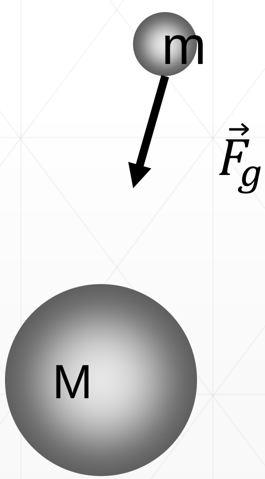
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

gdzie m, q masa lub ładunek ciała próbnego – małego obiektu nie zakłócające pola sił

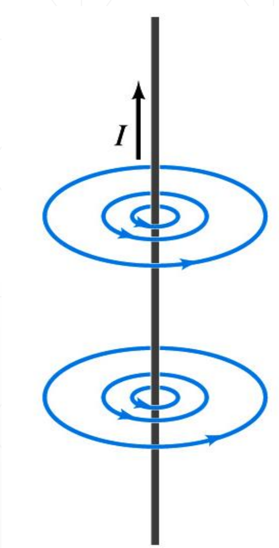
Przykłady pól siłowych

pole
elektrostatyczne

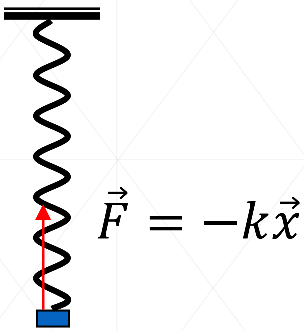




pole grawitacyjne



pole magnetyczne



pole sprężyste

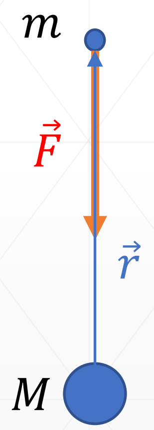
Pole grawitacyjne

- Prawo powszechnego ciążenia (prawo grawitacji) sformułowane przez Newtona:

Dwa punkty materialne o masach m_1 i m_2 przyciągają się wzajemnie siłą proporcjonalną do iloczynu tych mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi

Współczynnik G = 6,672 10^{-11} m^3/kgs^2 to stała grawitacji

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$



- Niech $M = m_1$ jest dużą masą wytwarzającą pole grawitacyjne, a $m = m_2$ niewielką masą próbną. Siła działająca na masę próbną umieszczoną w odległości r od masy M wyraża się wzorem

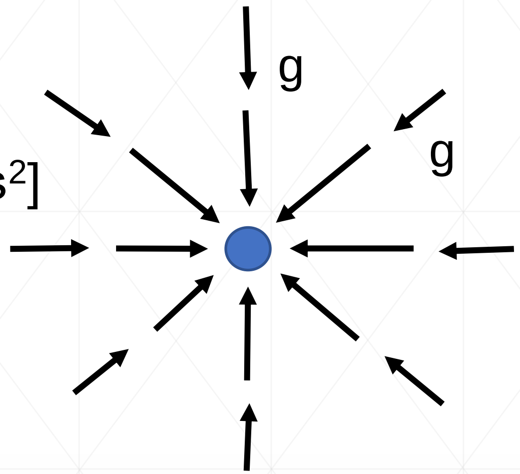
$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

- znak minus oznacza, że wektor $\vec{r}$ ma przeciwny zwrot niż wektor $\vec{F}$
- Masa M wytwarza w swym otoczeniu pole grawitacyjne, a istniejące pole działa na masę próbną m siłą F ($m \ll M$)

Przyspieszenie ziemskie g

- Miarą ilościową pola grawitacyjnego jest jego natężenie $\vec{E}$ – równe liczbowo sile działającej na jednostkową masę próbną :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$



- Wektor $\vec{E}$ wyraża się w jednostkach przyspieszenia [m/s^2]

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}_g$$

- W przypadku pola grawitacyjnego Ziemi natężenie pola ***E*** jest równe przyspieszeniu grawitacyjnemu ***g*** pochodzącemu wyłącznie od siły grawitacji.
- Wartość a_g zależy od wysokości nad powierzchnią Ziemi
  - Na powierzchni Ziemi (h = 0 km) g = 9,83 [m/s^2]
  - Na szczycie Mt. Everestu (h = 8,8 km) g = 9,80 [m/s^2]
  - Na orbicie kosmicznej (h = 400 km) g = 8,70 [m/s^2]
- Wartość przyspieszenia ziemskiego g różni się od a_g w różnych punktach powierzchni Ziemi bo
  - Ziemia nie jest jednorodna ani kulista
  - Ziemia obraca się, przyspieszenie na równiku jest mniejsze niż na biegunach

$$g = a_g - \omega^2 r$$

Masa i ciężar ciała

- Masa jest miarą ilości materii w danym ciele, ale trudno ją zdefiniować. Masa ciała jest jego cechą, która wiąże siłę przyłożoną do ciała z uzyskiwanym przez nie wówczas przyspieszeniem.

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} \qquad \frac{m_x}{m_0} = \frac{a_0}{a_x}$$

- Ciężar ciała jest równy wartości bezwzględnej siły ciężkości działającej na to ciało.

$$W = mg$$

- Ważenie ciał to wyznaczanie jego ciężaru.
- Definiujemy ciężar jako wynik działania pola grawitacyjnego na ciało w nim się znajdujące.

Ciężar kuli do kręgli o masie 7,2 kg to na Ziemi 71 N, a na Księżycu 12 N.

Energia pola grawitacyjnego

Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym (pole potencjalne)

Energia potencjalna pola grawitacyjnego – nagromadzona w danym punkcie pola zdolność do wykonywania pracy. Praca jaka musi być wykonana by przenieść daną masę z nieskończoności do danego punktu pola.

$$E_p = E_p(r) - E_p(\infty) = -W_{\infty \to r} = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2} \cdot dr = -\frac{GMm}{r}$$

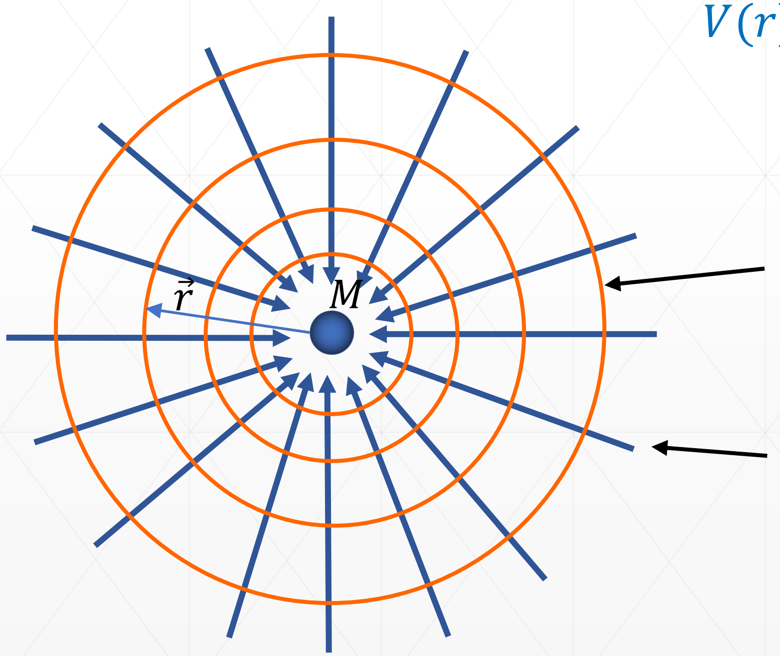
Energia potencjalna ma wartość równą zeru w nieskończoności (punkt odniesienia) i maleje w miarę zmniejszania się *r*. Oznacza to, że siła jest przyciągająca. Wzór ten jest prawdziwy bez względu na wybór drogi po jakiej punkt porusza się z nieskończoności do *r* bo siła grawitacji jest siłą zachowawczą.

Potencjał grawitacyjny

Wielkością skalarną charakteryzującą pole grawitacyjne jest potencjał V

Potencjał pola grawitacyjnego – energia potencjalna jednostkowej masy próbnej w danym punkcie pola:

$$V(r) = \frac{E_p}{m} = -\frac{GM}{r}$$



Powierzchnie ekwipotencjalne to powierzchnie, których wszystkie punkty mają taki sam potencjał grawitacyjny.

Linie sił obrazujące kierunek natężenie pola są zwrócone jest ku masie M.

Prędkości kosmiczne

Pole grawitacyjne planety stanowi swoistą „pułapkę” dla dowolnego obiektu materialnego. Jeśli chce się z niej uwolnić, to energia ciała (kinetyczna) musi być większa niż energia potencjalnego oddziaływania pola planety.

I prędkość kosmiczna – **pozioma** prędkość, jaką należy nadać ciału aby poruszało się ono po zamkniętej orbicie kołowej równej promieniowi planety R.

$$F_g = F_{od} \qquad \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad \boldsymbol{v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Pierwsza prędkość kosmiczna dla planety jest **największą** prędkością jaką może mieć ciało na stabilnej orbicie kołowej.

Dla Ziemi o $M = 5{,}96 \cdot 10^{24}$ kg oraz $R = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ m więc $v_1 = 7{,}9$ km/s

II prędkość kosmiczna (prędkość ucieczki) – jest to najmniejsza prędkość, którą trzeba nadać ciału by oddaliło się od danej planety, teoretycznie do nieskończoności. Energia w nieskończoności jest równa 0, zatem na powierzchni sumaryczna energia też musi wynosić 0:

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{mv^2}{2} = 0 \longrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v_1$$

Dla Ziemi
$v_2 = 11{,}2$ km/s

Ruch w polu grawitacyjnym – prawa Keplera

(ok. 1600 r.):

1) Torami planet są elipsy. Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.
2) Prędkość polowa planety jest stała (promień wodzący planety zakreśla w jednakowym czasie jednakowe pola).
3) Stosunek kwadratów czasów obiegu dwóch planet jest równy stosunkowi trzecich potęg ich dużych półosi.

Pierwsze prawo jest szczególnym przypadkiem ruchu w polu centralnej siły grawitacyjnej.

Drugie wynika z zasady zachowania momentu pędu w polu sił centralnych.

Trzecie prawo wynika z porównania sił ciężkości i odśrodkowej.

Z praw mechaniki Newtona wynika, że trzy prawa Keplera poprawnie opisują ruch planety w układzie związanym ze Słońcem. Dokładniej: prawa Keplera mówią o układzie dwóch ciał obdarzonych masą, z których jedno ma masę zaniedbywalnie małą w porównaniu z masą drugiego.

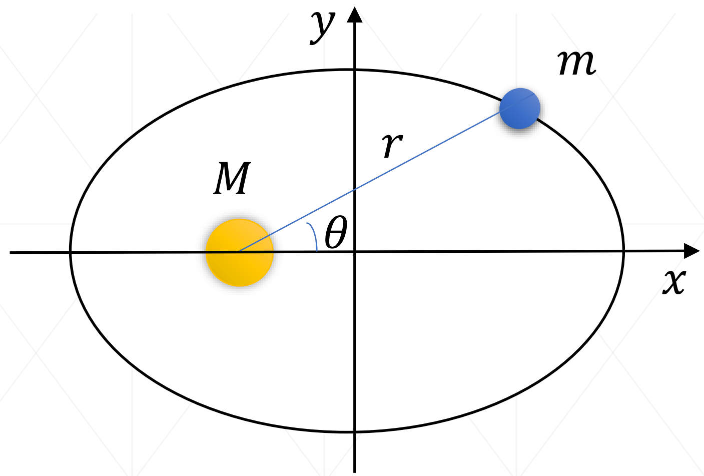
I prawo Keplera

Wszystkie planety poruszają się po orbitach w kształcie elipsy, w której ognisku znajduje się Słońce.

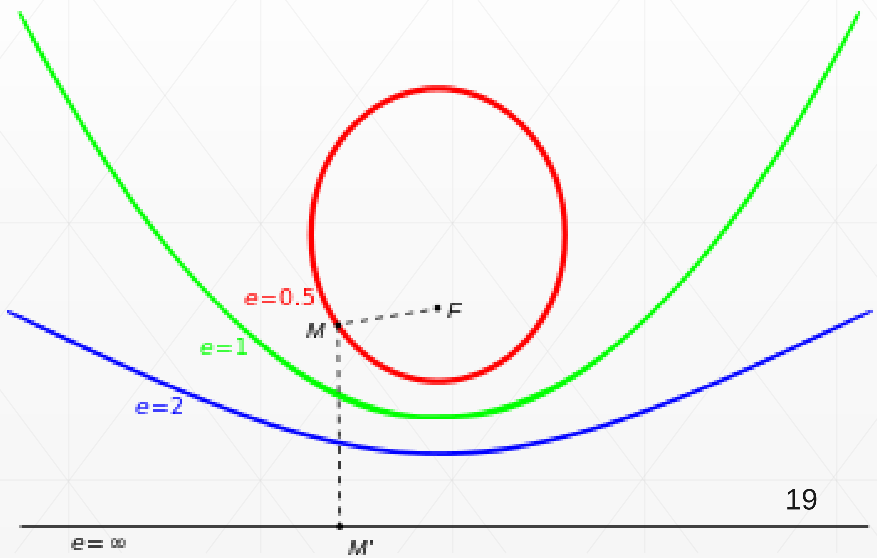
Równanie toru planety we współrzędnych biegunowych

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

gdzie
r – promień wodzący,
e – mimośród,
p – parametr elipsy



Prawa Keplera mówią o układzie dwóch ciał z których jedno ma masę zaniedbywalnie małą w porównaniu do drugiego. Gdy masy obu krążących ciał są porównywalne to każde z dwóch ciał porusza się po krzywej stożkowej, w ognisku której znajduje się środek masy całego układu.



Energia całkowita ciała w polu grawitacyjnym

Pole grawitacyjne planety stanowi swoistą „pułapkę” dla dowolnego obiektu materialnego. Jeśli chce się z niej uwolnić, to energia ciała (kinetyczna) musi być większa niż energia potencjalnego oddziaływania pola planety.

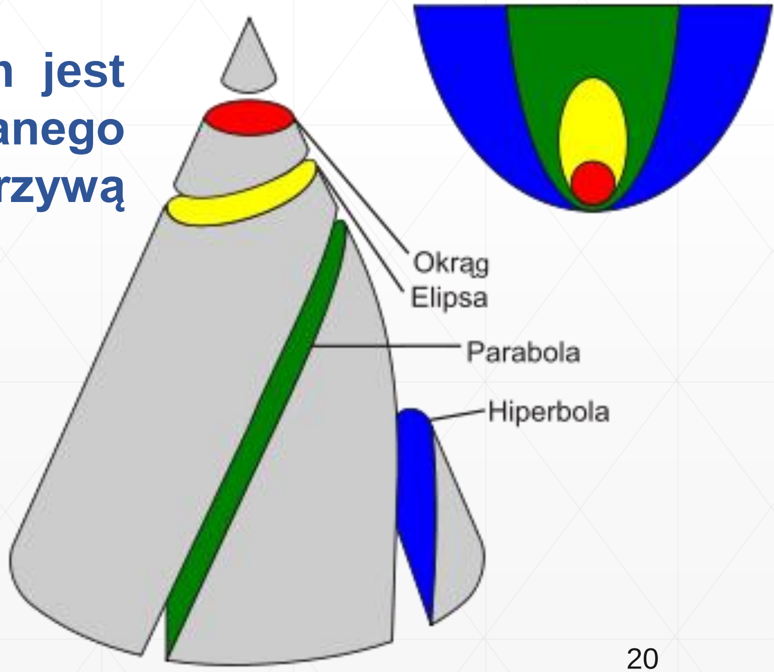
Energia potencjalna pola grawitacyjnego

$$E_{p_r} = -\frac{GMm}{r} < 0$$

Ciała poruszają się po orbitach stożkowych.

Energia całkowita ciała w polu grawitacyjnym jest zachowana i w przypadku ciała związanego grawitacyjnie jest ujemna, a orbita jest krzywą zamkniętą

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} = const < 0$$



W przypadku gdy energia całkowita jest dodatnia to orbita jest krzywą otwartą – dla $E = 0$ – parabola, a dla $E > 0$ – hiperbola. Mniejsze ciało porusza się na tyle szybko, że zbliży się do drugiego ciała tylko jednokrotnie

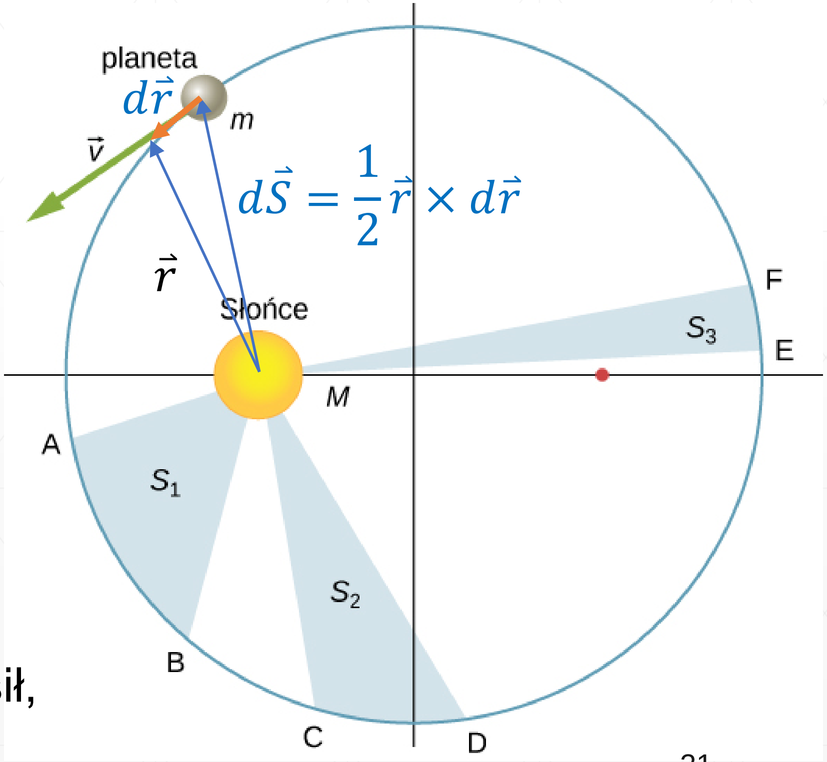
II prawo Keplera

Prędkość polowa planety jest stała
(promień wodzący planety zakreśla w jednakowym czasie jednakowe pola).

Prawo to stwierdza, że dla dowolnej krzywej stożkowej:

$$\vec{v_S} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\vec{r}}{dt} \times d\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\underbrace{\vec{v} \times d\vec{r}}_{=0} + \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m}\vec{r} \times m\vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m} = const$$

gdzie: v_S jest prędkością polową, $d\vec{S}$ jest wektorem powierzchni o wartości pola zakreślanego w czasie *dt* przez promień wodzący o początku w ognisku elipsy,
$\vec{L}$ - moment pędu planety.

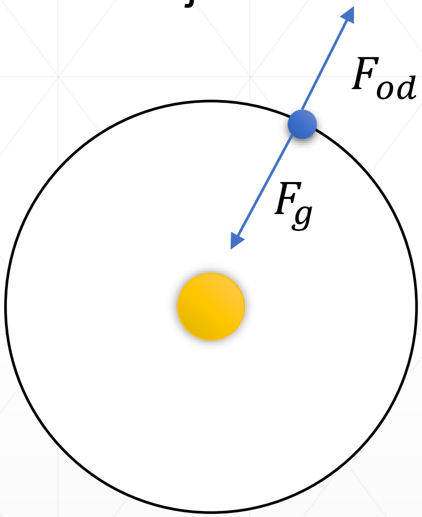


Powyższą zależność jest przejawem działania zasady zachowania momentu pędu planety. Siła grawitacyjna, jako oddziaływanie centralne, w układzie podwójnym nie wywołuje momentów sił, zatem moment pędu układu zostaje zachowany.

III prawo Keplera

Stosunek kwadratów czasów obiegu dwóch planet jest równy stosunkowi trzecich potęg ich dużych półosi.

Porównując siłę odśrodkową z siłą grawitacji dla orbity kołowej otrzymujemy:



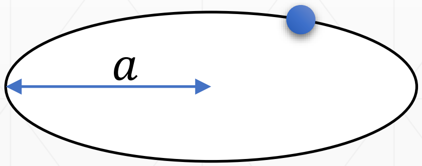
$$F_g = F_{od}$$

$$\frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r = \frac{m4\pi^2 r}{T^2}$$

stąd

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

W przypadku ruchu po elipsie



$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = const$$

lub

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Podsumowanie

Pojęcie pola

- Pole to nowoczesny sposób na przedstawianie oddziaływań w fizyce
- Wielkości charakteryzujące pola to: natężenie, energia potencjalna oraz potencjał pola.
- Pola zachowawcze to pola w których praca nie zależy od drogi a jedynie od początkowego i końcowego położenia ciała.

Prawo powszechnego ciążenia

- Wszystkie ciała przyciągają się ku sobie dzięki sile grawitacji, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości pomiędzy nimi.

Grawitacja przy powierzchni Ziemi

- Ciężar ciała wynika z przyciągania grawitacyjnego między Ziemią a tym ciałem.
- Pole grawitacyjne jest reprezentowane przez linie pola grawitacyjnego. Określają one kierunek siły grawitacji, a odległość między liniami określa natężenie pola grawitacyjnego.

Prawa Keplera

- Wszystkie ciała poruszają się po orbitach będących krzywymi stożkowymi. Orbity ciał związanych grawitacyjnie są krzywymi zamkniętymi i mają kształt okręgu lub elipsy, a orbity ciał niezwiązanych grawitacyjnie są krzywymi otwartymi i mają kształt paraboli lub hiperboli.
- Prędkość polowa ciała na dowolnej orbicie jest stała, co odzwierciedla zasadę zachowania momentu pędu.
- Kwadrat okresu obiegu planety wokół gwiazdy po orbicie eliptycznej jest proporcjonalny do sześcianu długości półosi wielkiej tej orbity.