9. Zasady zachowania w mechanice

- zasada zachowania energii,
- zasada zachowania pędu,
- zasada zachowania momentu pędu,
- rola zasad zachowania w mechanice.

Zasady zachowania – najbardziej fundamentalne prawa

- wyrażają stałość danej wielkości fizycznej w trakcie określonych procesów fizycznych;
- zasady zachowania:
  - pędu, momentu pędu, energii;
  - ładunku, liczby nukleonów, liczby leptonowej.

Prawo zachowania energii mechanicznej

- Energia mechaniczna układu jest sumą energii potencjalnej i kinetycznej wszystkich jego składników

$$E_{mech} = E_k + E_p$$

- gdy układ jest odosobniony (izolowany od otoczenia) i **siła zachowawcza** wykonuje pracę W_{AB} nad jednym z ciał układu to zachodzi zmiana energię kinetycznej ciała w energię potencjalną układu

$$\Delta E_k = W_{AB} \qquad \Delta E_p = -W_{AB} \qquad E_{k_B} - E_{k_A} = -\left(E_{p_B} - E_{p_A}\right)$$

- jeżeli wszystkie siły działające na cząstkę są **zachowawcze**, to całkowita energia cząstki w każdym jej położeniu jest wielkością stałą, zwaną całkowitą energią mechaniczną

$$E_{k_A} + E_{p_A} = E_{k_B} + E_{p_B} = const = E_{mech}$$

Całkowita energia układu

- jeżeli w układzie oprócz sił zachowawczych działa siła niezachowawcza (rozpraszająca) np. siła tarcia, to zmiana energii kinetycznej cząstek jest równa:

$$\Delta E_k = W_{AB} = W_{AB}(zach) + W_{AB}(rozp)$$

- korzystając z definicji energii potencjalnej otrzymujemy, że praca sił rozpraszających jest <0 i równa zmianie E_{mech}

$$W_{AB}(rozp) = (E_{k_B} - E_{k_A}) + (E_{p_B} - E_{p_A}) = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_{mech}$$

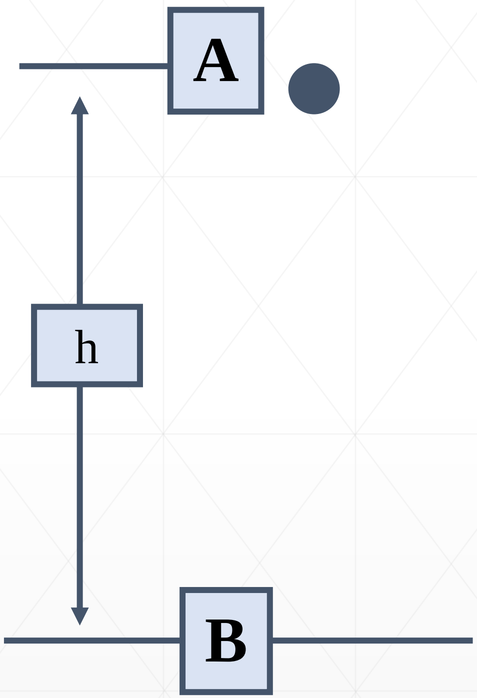
- energia układu odosobnionego może przekształcać się z jednej postaci w inną, jednak energia całkowita w jej różnorodnych formach nie może być ani stworzona z niczego, ani też unicestwiona

- całkowita energia układu odosobnionego nie może się zmieniać

$$\Delta E_k + \Delta E_p + \Delta E_{wew} = 0 \qquad bo \quad \Delta E_{wew} = -W_{AB}(rozp)$$

Przykład 1 – spadek swobodny

Jaką prędkość osiągnie piłka o masie m przy swobodnym spadku z wysokości *h* jeżeli można pominąć opory ruchu?



Siła grawitacji, jaką działają na siebie składniki układu (na przykład Ziemia na piłkę), jest siłą wewnętrzną. Energia potencjalna wynika z istnienia siły grawitacji.

Suma energii kinetycznej i potencjalnej piłki w polu **sił potencjalnych** jest stała i nie zależy od punktu, w którym znajduje się cząstka $E = E_k + E_p = \text{const}$

Dla pkt. A: $E_{K(A)} = 0, \quad E_{p(A)} = mgh$

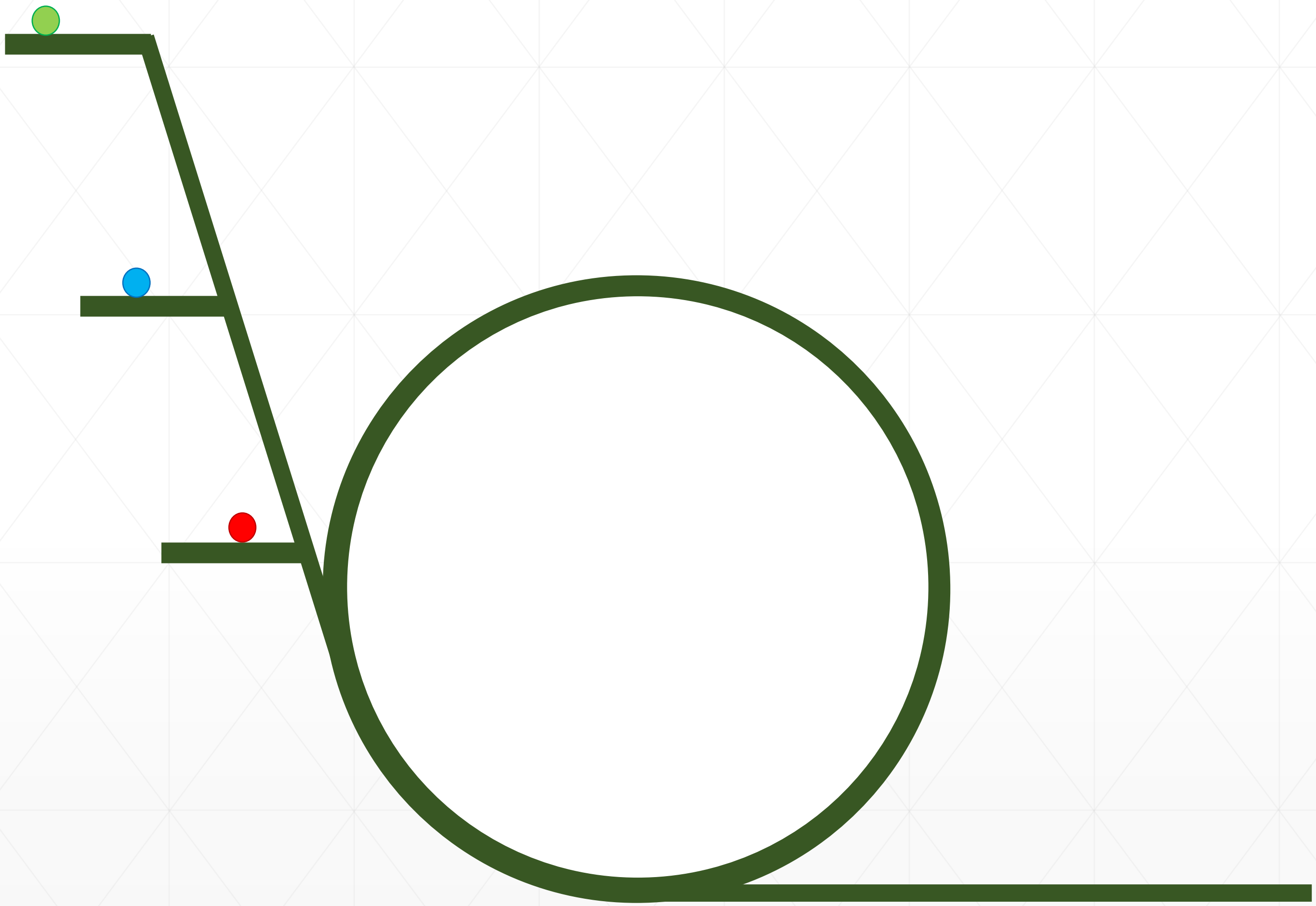
Dla pkt. B: $E_{K(B)} = \frac{mV^2}{2}, \quad E_{p(B)} = 0$

$$E_{K(A)} + E_{P(A)} = E_{K(B)} + E_{P(B)} \Leftrightarrow 0 + \text{mgh} = \frac{mV^2}{2} + 0$$

Zasada Galileusza – prędkość w spadku swobodnym nie zależy od masy a tylko od wysokości

$$V = \sqrt{2gh}$$

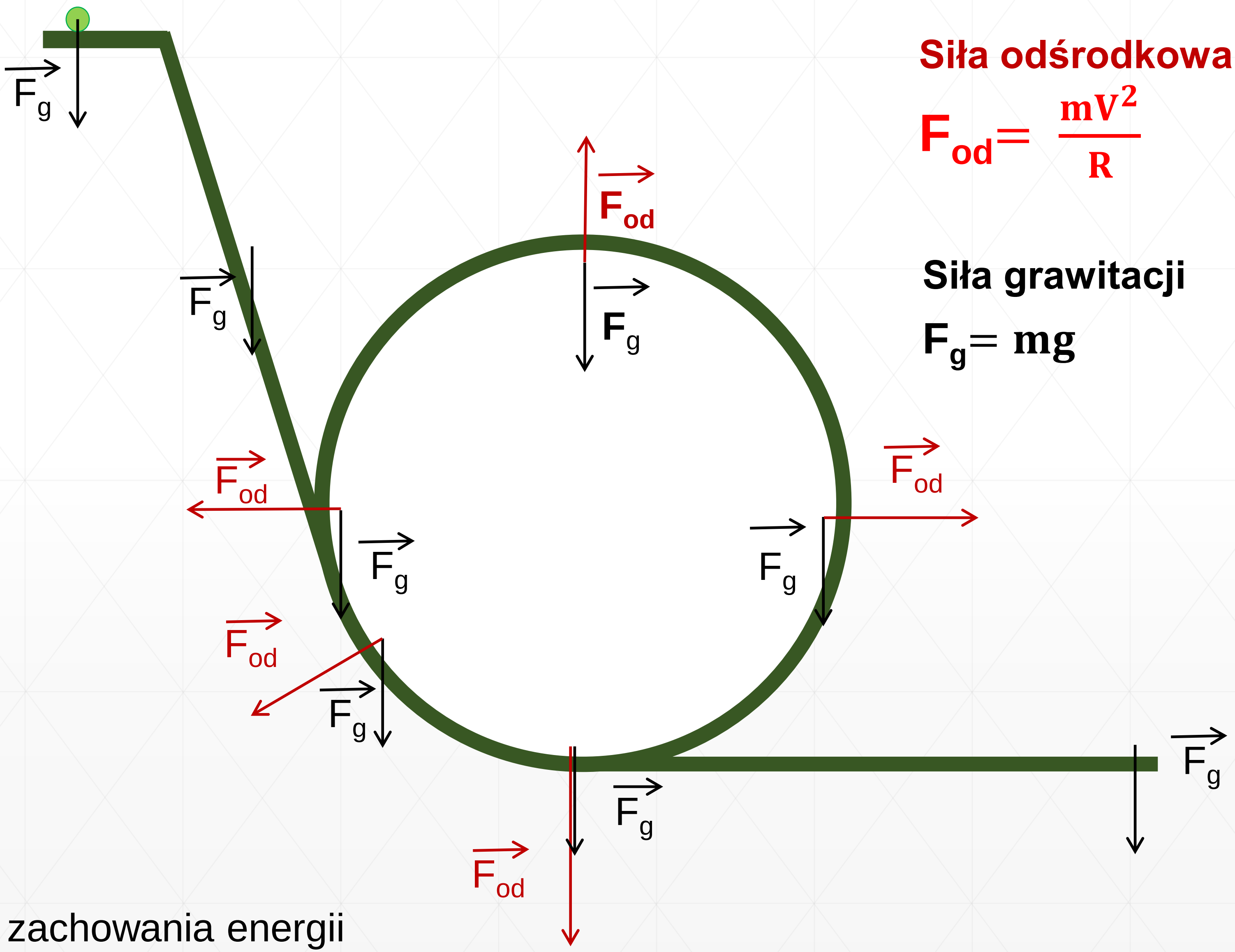
Przykład 2 – Pętla śmierci



Zasada zachowania energii

M1 Pętla Maxwella

Przykład 2 – Pętla śmierci



Siła odśrodkowa

$$F_{od} = \frac{mV^2}{R}$$

Siła grawitacji

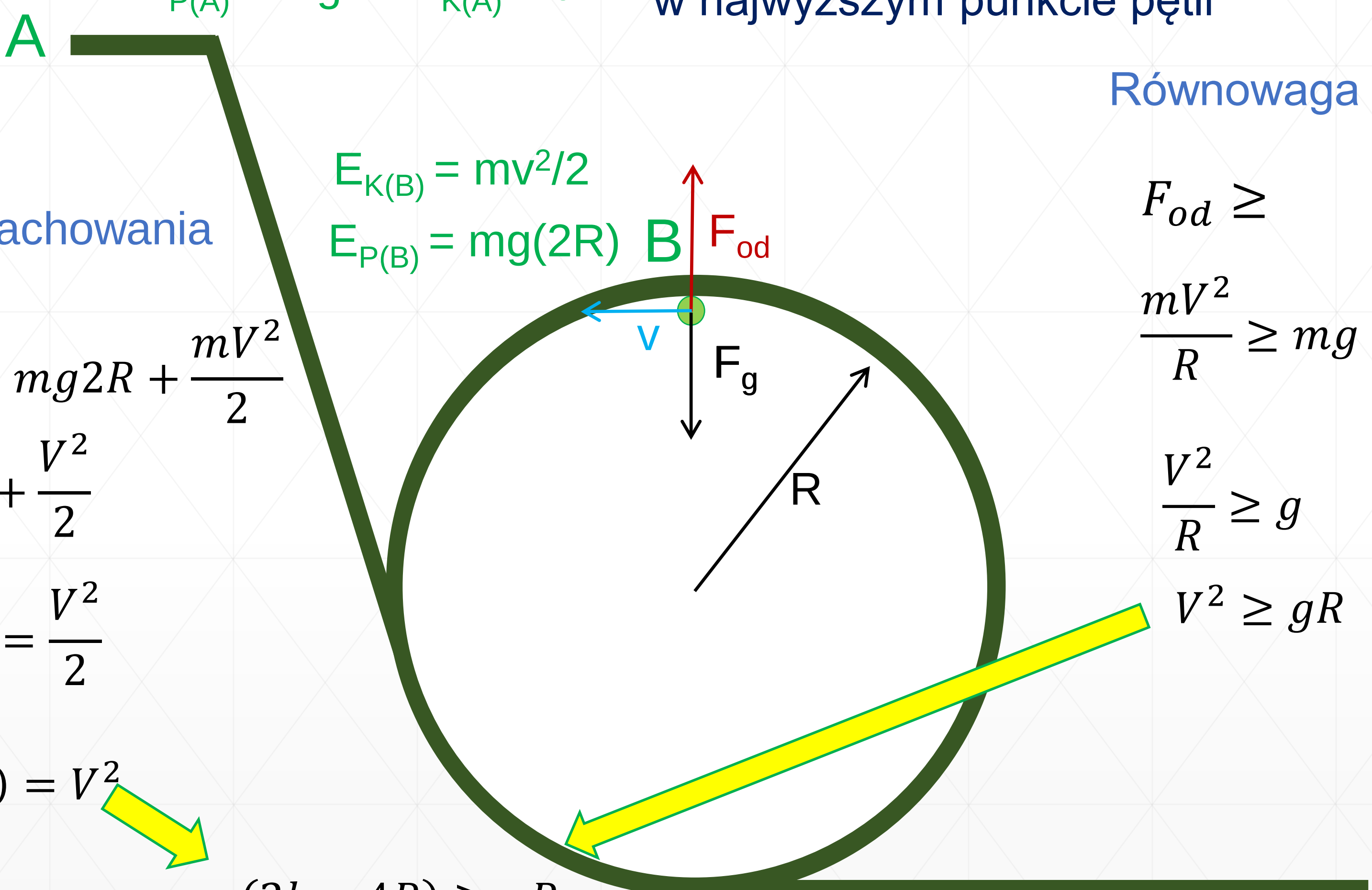
$$F_g = mg$$

Zasada zachowania energii

Przykład 2 – Pętla śmierci

Szukamy prędkości kulki
w najwyższym punkcie pętli

$E_{P(A)} = mgh \quad E_{K(A)} = 0$



$E_{K(B)} = mv^2/2$

$E_{P(B)} = mg(2R)$

Zasada zachowania energii

$$mgh + 0 = mg2R + \frac{mV^2}{2}$$

$$gh = 2gR + \frac{V^2}{2}$$

$$g(h - 2R) = \frac{V^2}{2}$$

$$g(2h - 4R) = V^2$$

Równowaga sił

$$F_{od} \geq$$

$$\frac{mV^2}{R} \geq mg$$

$$\frac{V^2}{R} \geq g$$

$$V^2 \geq gR$$

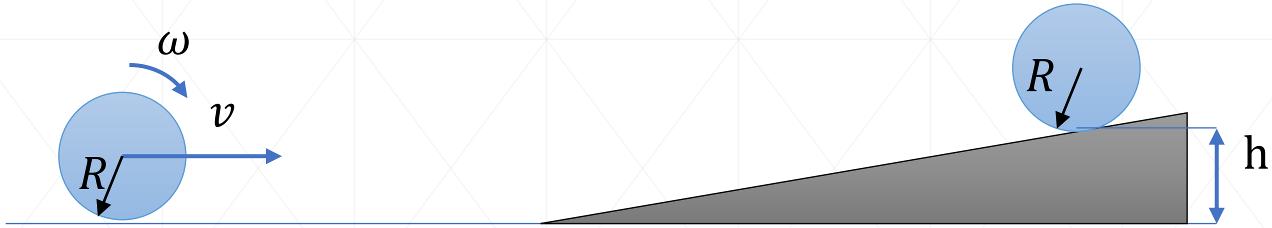
$$g(2h - 4R) \geq gR$$

$$2h - 4R \geq R \qquad 2h \geq 5R \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{h \geq \frac{5}{2}R}$$

Wysokość startowa musi być większa od 5/2 R

Przykład 3 – Toczące się ciało

Ciało o promieniu *R* i masie *m* toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni z prędkością *v*, po czym wtacza się na pochylnię na wysokość $h = \frac{3v^2}{4g}$.
Oblicz moment bezwładności ciała *I* względem osi obrotu przechodzącej przez środek masy, co to może być za ciało?



$$E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$$

$$\mathrm{mgR} + \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \mathrm{mg(h+R)} + 0$$

podstawiając $h = \frac{3v^2}{4g}$, $\omega = \frac{v}{R}$

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Iv^2}{2R^2} = \mathrm{mg}\frac{3v^2}{4g} \Rightarrow m + \frac{I}{R^2} = \mathrm{m}\frac{3}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\mathrm{m}R^2$$

walec

Zasada zachowania pędu

Przypomnienie: Poprzednio pokazaliśmy, że wszelkie zmiany prędkości mogą zachodzić jedynie pod działaniem sił. Ta zależność jest treścią drugiej zasady dynamiki Newtona.

Druga zasada dynamiki głosi, że: przyspieszenie ciała $\vec{a} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{t_2 - t_1}$ jest

wprost proporcjonalne do siły F, która to przyśpieszenie wywołuje: $\vec{F} = m\vec{a}$

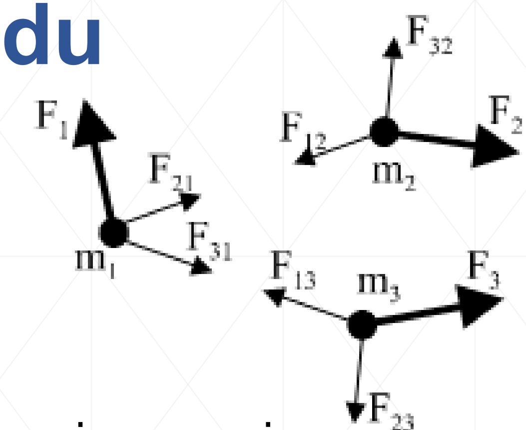
czyli

$$\vec{F}(t_2 - t_1) = m\overrightarrow{v_2} - m\overrightarrow{v_1}$$

- Iloczyn siły i czasu jej działania nazywamy popędem siły. Jest to wektor o kierunku zgodnym z kierunkiem wektora *F*. $\vec{F} \cdot \Delta t$
- Iloczyn masy i prędkości nosi nazwę pędu. Jest to również wektor o kierunku zgodny z kierunkiem wektora prędkości υ. $\vec{p} = m\vec{v}$
- Zatem, wektor popędu siły jest równy wektorowemu przyrostowi pędu wywołanemu przez tę siłę. $\vec{F} \cdot dt = d\vec{p}$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Zasada zachowania pędu



- Rozważmy układ punktów materialnych, na które działają siły wewnętrzne $\overrightarrow{F_w}$ oraz siły zewnętrzne $\overrightarrow{F_Z}$

$$\vec{F} = \sum \overrightarrow{F_Z} + \sum \overrightarrow{F_w}$$

- Z trzeciej zasady dynamiki wynika, że siły wewnętrzne występują parami, których składniki są równe co do wartości, lecz przeciwne co do kierunku. Stąd wniosek, że wypadkowa wszystkich sił wewnętrznych równa się zeru

$$\sum \overrightarrow{F_w} = 0$$

- Zatem przyrost całkowitego pędu układu $\vec{p}$ może się dokonać tylko poprzez działanie na układ sił zewnętrznych

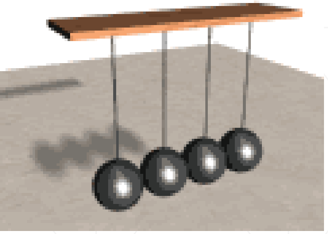
$$\vec{F} = \sum \overrightarrow{F_Z} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Jeżeli wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na rozważany układ równa się zeru to

$$\vec{F} = \sum \overrightarrow{F_Z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = const$$

Suma wektorowa pędów wszystkich elementów układu odosobnionego (czyli takiego, na którego nie działają siły zewnętrzne) pozostaje stała.

Oddziaływanie wzajemne elementów układu siłami wewnętrznymi nie zmienia całkowitego pędu układu.



Zasada zachowania pędu

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = const$$

- całkowity pęd odosobnionego i zamkniętego układu cząstek, w którym działają tylko siły wewnętrzne, czyli siły akcji i reakcji, pozostaje stały (jeśli na układ cząstek nie działają siły zewnętrzne lub ich wypadkowa jest równa zeru, to całkowity pęd układu nie ulga zmianie)

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = const$$

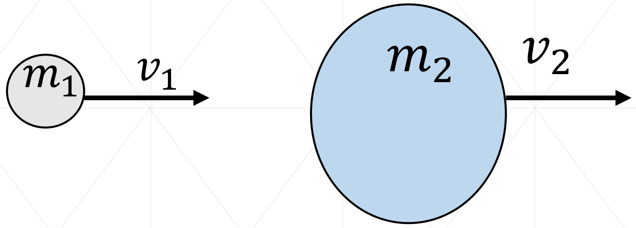
- całkowity pęd początkowy jest równy pędowi końcowemu

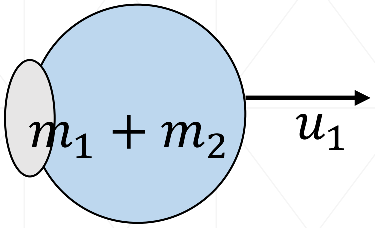
$$\vec{p}_{pocz} = \vec{p}_{konc}$$

- jeśli wypadkowa sił zewnętrznych jest wzdłuż pewnej osi równa zeru, to składowa pędu w tym kierunku nie ulega zmianie

$$p_{xpocz} = p_{xkonc}$$

Przykład:
Zderzenie niesprężyste (idealne)





Zasada zachowania pędu

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u_1$$

$$\boxed{u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$$

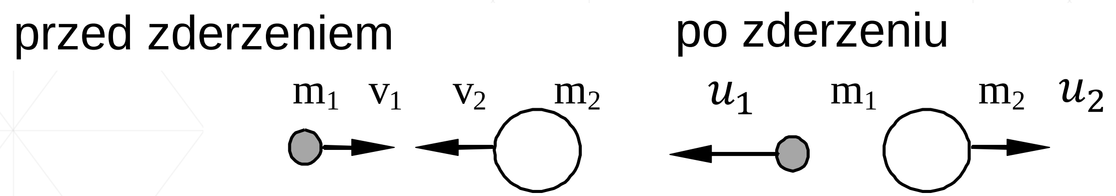
Zasada zachowania energii

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u_1^2}{2} + \Delta E$$

$$\Delta E$$

strata energii

Przykład 4 - Zasady zachowania pędu



Zderzenie sprężyste – zasada zachowania pędu:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = -m_1 u_1 + m_2 u_2 \quad \Rightarrow \; m_1(v_1 + u_1) = m_2(u_2 + v_2)$$

+ zasada zachowania energii:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \Rightarrow m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2)$$

$$u_1 = \frac{(m_2 - m_1)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad oraz \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}$$

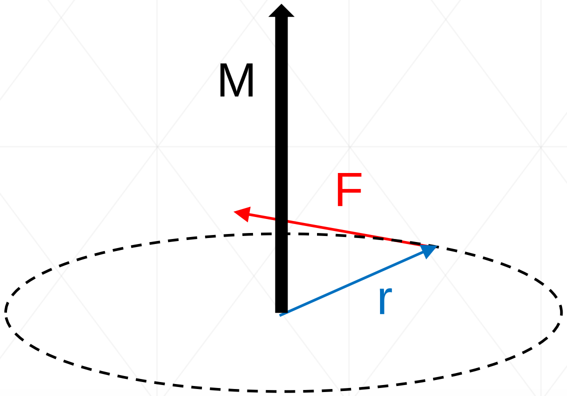
Wnioski:

gdy $m_1 = m_2$, wówczas następuje wymiana prędkości kul: $u_1 = v_2$ i $u_2 = v_1$,

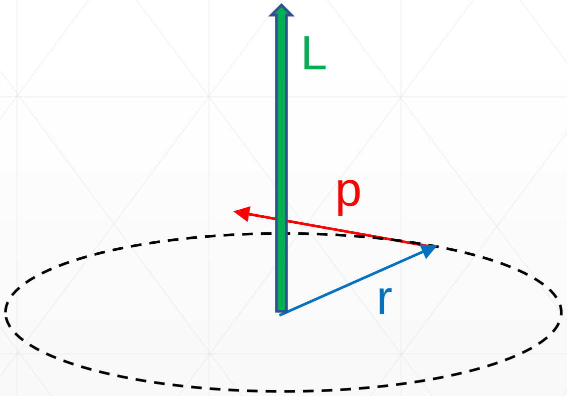
gdy $(m_1 - m_2)v_1 = 2m_2 v_2$ kula 1 się zatrzyma i cały pęd przekaże kuli 2.

Zasada zachowania momentu pędu

Przypomnienie: Poprzednio pokazaliśmy, że wszelkie zmiany prędkości kątowej ciała mogą zachodzić jedynie pod działaniem momentu sił. Ta zależność jest treścią drugiej zasady dynamiki Newtona dla ruchu orotowego.

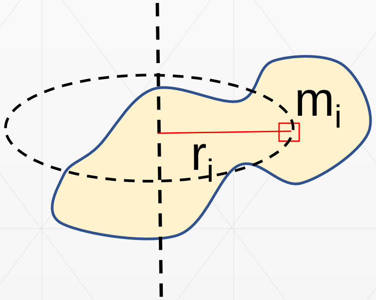


Moment siły (***M***) to iloczyn wektorowy (×) ramienia (***r***) na którym działa siła i tej siły (***F***): $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

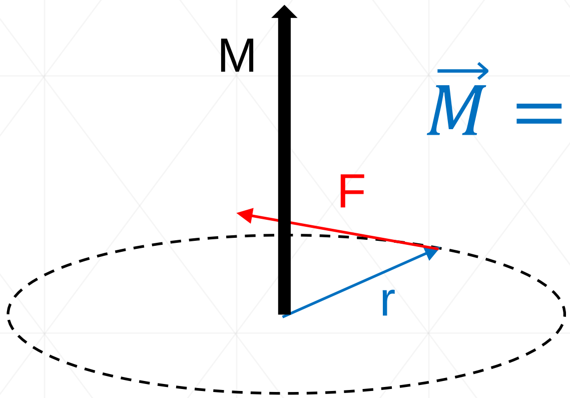


Moment pędu (***L***) to iloczyn wektorowy (×) ramienia (***r***) i pędu (***p***), który posiada ciało: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

Moment bezwładności (I) to (dla ciała dyskretnego) suma iloczynów mas (m_i) i kwadratu odległości (r_i) i-tej masy od osi obrotu: $\mathrm{I} = \sum_i m_i {r_i}^2$

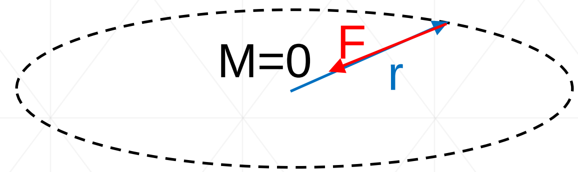


Zasada zachowania momentu pędu



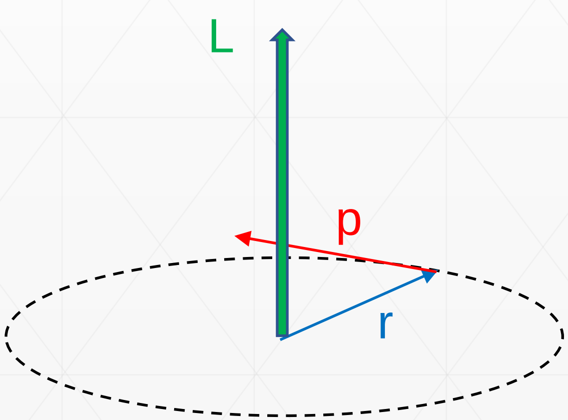
$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Jeżeli siła będzie skierowana wzdłuż promienia
(albo do osi obrotu albo od osi obrotu)
to na układ nie będzie działał moment siły!

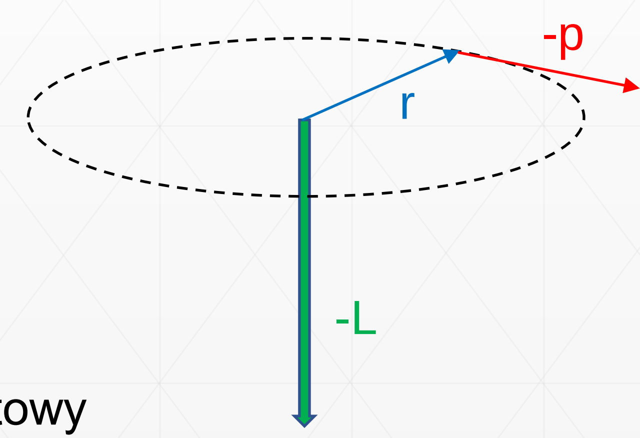


$$M = rF \sin \sphericalangle\left(\vec{r}, \vec{F}\right)$$

Zmiana pędu na przeciwny powoduje, że moment
pędu staje się skierowany w przeciwna stronę
– zgodnie z właściwościami iloczynu wektorowego



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



Wielkości opisujące ruch obrotowy

Analogie na przykładzie ruchu po okręgu i ruchu punktu materialnego

Ruch postępowy

Ruch obrotowy

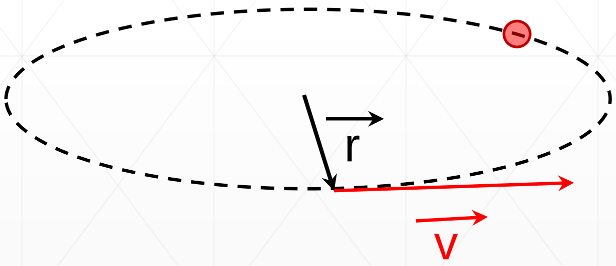
Prędkość liniowa: **v**

Pęd punktu: $p = mv$

Prędkość kątowa: ω

Moment pędu: $L = I\omega$

$$rp = mrv \quad \Rightarrow \quad L = mrv\frac{r}{r} \quad \Rightarrow \quad L = mr^2\frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad L = I\omega$$



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{\frac{1}{2}mr^2v^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Energia kinetyczna: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

Energia kinetyczna: $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$

Zasada zachowania momentu pędu

- zmiana momentu pędu w czasie

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{p}})}{\mathrm{dt}} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{=0} + \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}} = \vec{M}$$

- jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ odosobniony jest równy zeru, to całkowity moment pędu tego układu jest stały

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{dt}} = 0 \longrightarrow \sum \vec{\mathrm{L}} = \mathrm{const}$$

M = 0 gdy: r = 0, lub F = 0, lub $\vec{F} \parallel \vec{r}$

Przykład 5
Student na obrotowym krześle

Student obraca się na krześle.

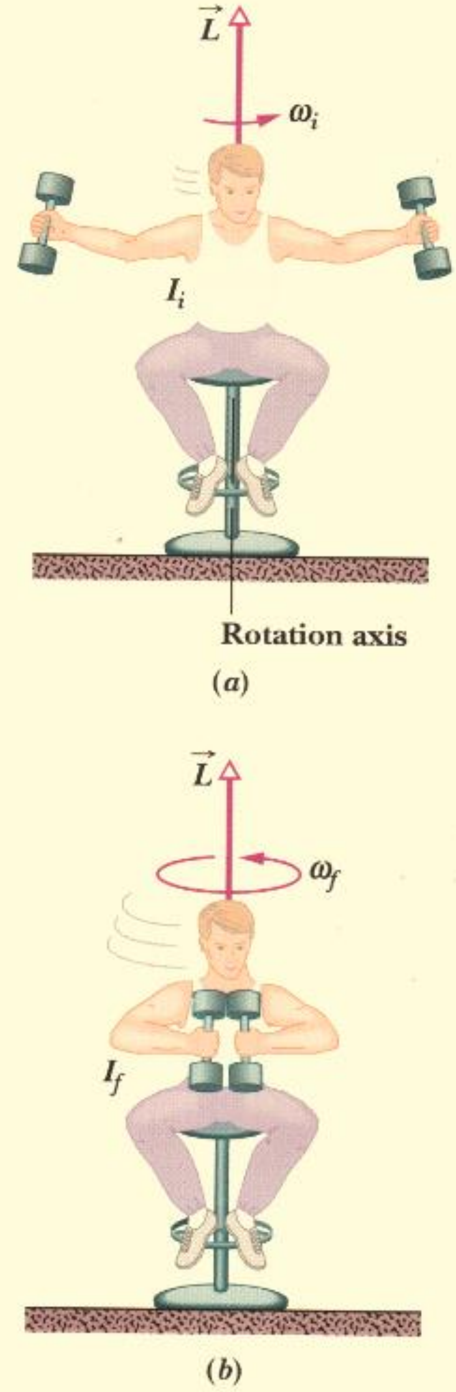
Przyciągając do siebie ciężarki zmniejsza moment bezwładności układu ($I_i > I_f$) (krzesło + człowiek + ciężarki) – maleje odległość ciężarków od osi obrotu.

Na układ nie działają momenty sił zewnętrznych. Z zasady zachowania momentu pędu wynika:

$$\vec{L}_{\text{pocz}} = \vec{L}_{\text{konc}}$$
$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i$$

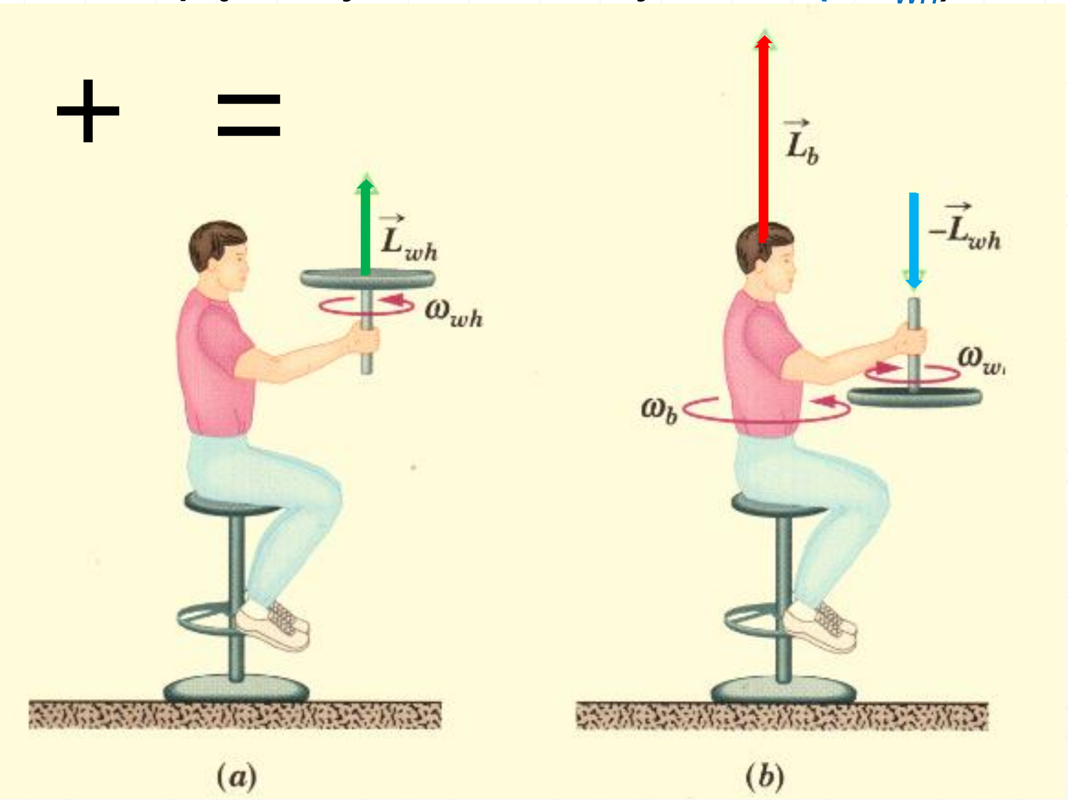
Wobec stałości iloczynu: $I\omega = \text{const}$, gdy maleje I to musi proporcjonalnie wzrosnąć ω ($\omega_f > \omega_i$).



Przykład 6 - Zastosowanie zasady zachowania momentu pędu

Student siedzi na krześle obrotowym trzyma jednocześnie koło obracające się (oś obrotu pionowa) z prędkością kątową ω_{wh}.
Koło to ma moment pędu (L_{wh}) skierowany ku górze.
Student obraca koło tak aby jego moment pędu był skierowany w dół ($-L_{wh}$).

Wówczas sam na krześle obrotowym zaczyna się obracać w uzyskując moment pędu L_b takiej wartości aby wypadkowy moment pędu był taki sam (czyli skierowany do góry) jak to było przed początkiem jego ruchu.

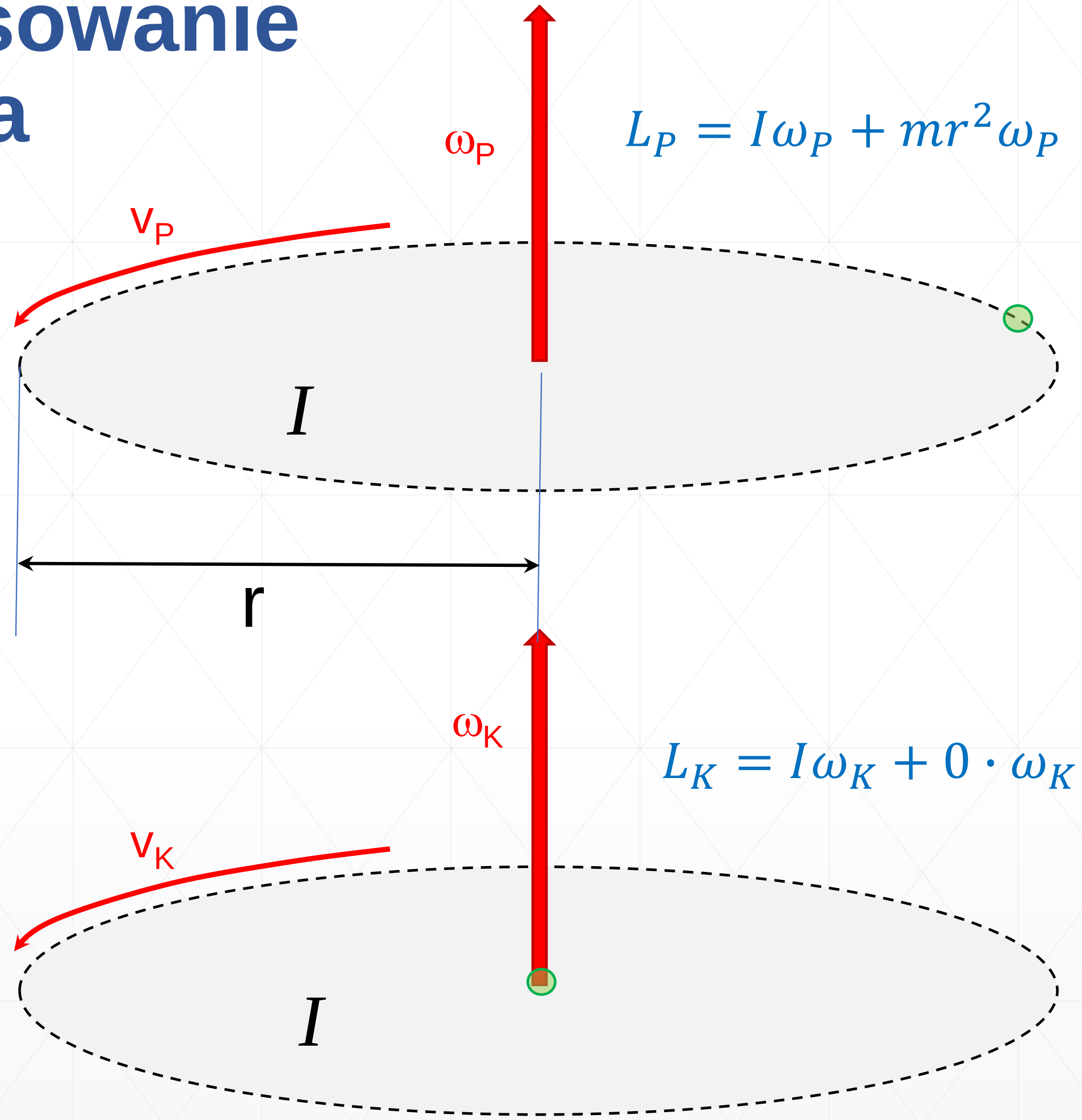


$$L_{wh} = L_b - L_{wh}$$

$$L_b = 2\, L_{wh}$$

Przykład 7 - Zastosowanie zasady zachowania momentu pędu

Na karuzeli o momencie bezwładności I, kręcącej się z prędkością kątową ω_P znajduje się człowiek o masie m (traktowany jako punkt materialny). Człowiek przemieszcza się do środka karuzeli. Jak zmieni się prędkość obrotowa karuzeli oraz energia kinetyczna ruchu obrotowego układu?



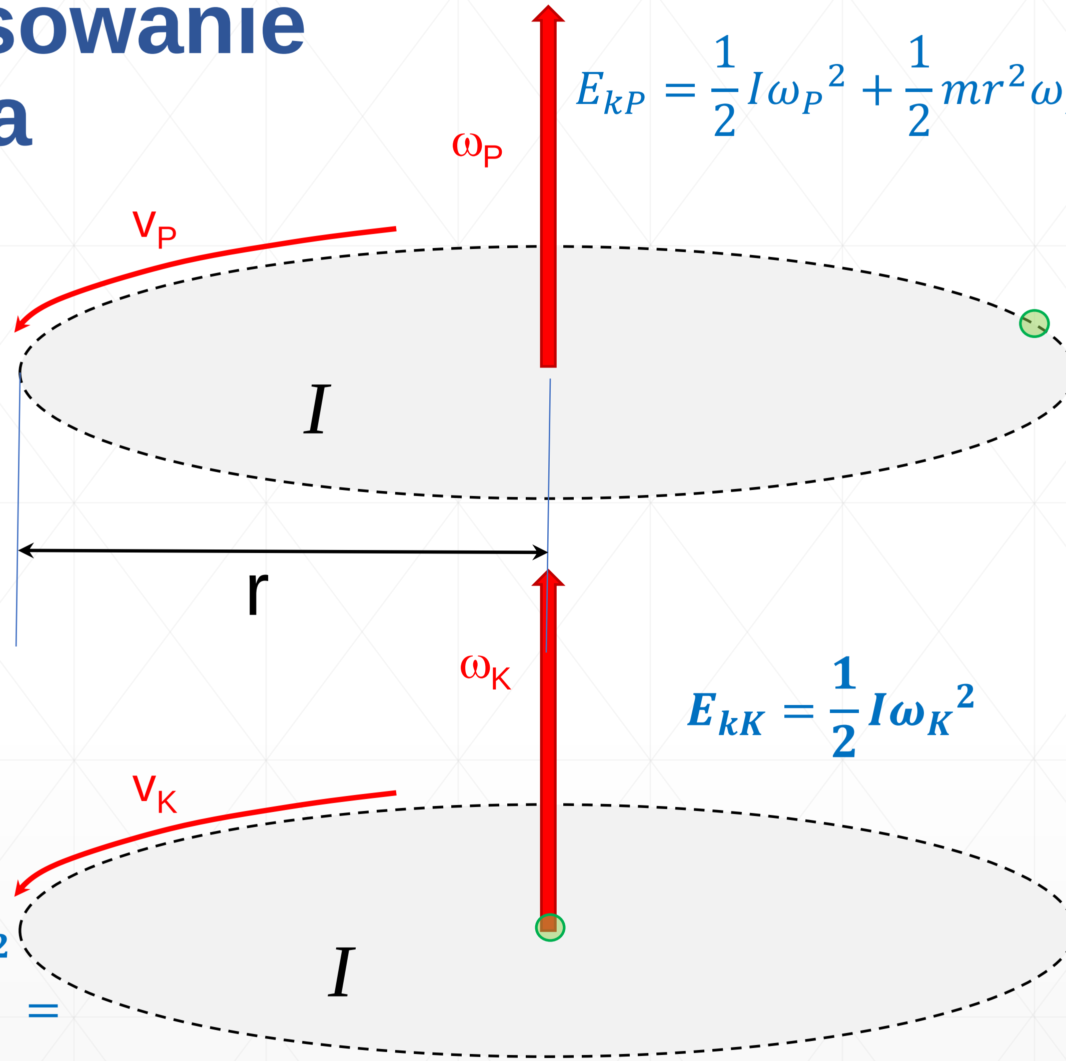
$$L_p = L_k = I\omega_p + mr^2\omega_p = I\omega_k$$

$$\Rightarrow \quad \omega_k = \frac{I + mr^2}{I}\omega_p$$

Przykład 7 - Zastosowanie zasady zachowania momentu pędu

Jak zmieni się energia kinetyczna ruchu obrotowego układu?

Energia kinetyczna rośnie bo człowiek idąc do środka wykonuje pracę przeciwko sile odśrodkowej.



$$E_{kP} = \frac{1}{2} I {\omega_P}^2 + \frac{1}{2} m r^2 {\omega_P}^2$$

$$E_{kK} = \frac{1}{2} I {\omega_K}^2$$

$$E_{kK} = \frac{1}{2} I {\omega_K}^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{I + mr^2}{I} \omega_P \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2I} {\omega_P}^2 \left(I^2 + 2Imr^2 + m^2 r^4 \right) = \frac{1}{2} I {\omega_P}^2 + 2 \frac{1}{2} m r^2 {\omega_P}^2 + \frac{m^2 r^4}{2I} {\omega_P}^2 =$$

$$= E_{kP} + \frac{1}{2} m r^2 {\omega_P}^2 + \frac{m^2 r^4}{2I} {\omega_P}^2 > E_{kP}$$

Analogia ruchu postępowego i obrotowego

	Ruch postępowy	Ruch obrotowy
Wielkości	m, v, a	I, ω, ε
Energia kinetyczna	$mv^2/2$	$I\omega^2/2$
II Zasada dynamiki	$F=ma$ $F=dp/dt$	$M=I\varepsilon$ $M=dL/dt$
pęd, moment pędu	$p=mv$	$L=I\omega$

Podsumowanie

- Zasada zachowania energii mechanicznej:

Jeżeli na ciało działają tylko siły zachowawcze, suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała.

- Zasada zachowania pędu:

Całkowity pęd odosobnionego i zamkniętego układu cząstek pozostaje stały.

- Zasada zachowania momentu pędu:

Jeżeli wypadkowy moment sił zewnętrznych działających na układ odosobniony jest równy zeru, to całkowity moment pędu tego układu jest stały.