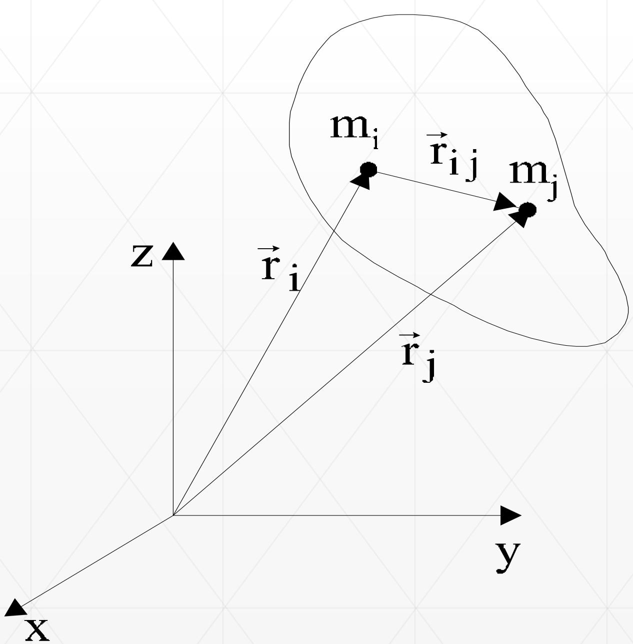
8. Dynamika bryły sztywnej

- ruch bryły sztywnej,
- środek masy,
- ruch w układzie środka masy,
- ruch obrotowy,
- moment bezwładności,
- twierdzenie Steinera,
- II zasada dynamiki ruchu obrotowego.

Model bryły sztywnej

Dotychczas opisywaliśmy ciało za pomocą **modelu punktu materialnego**, który jest użyteczny, gdy rozmiary ciała są znacznie mniejsze od odległości, z której opisujemy ruch. Teraz wprowadzimy kolejny model pozwalający uwzględnić nie tylko ruchy postępowe, ale także obrotowe ciała.

Bryła sztywna – ciało zajmujące pewną objętość w przestrzeni – ciągły układ punktów materialnych. Wzajemne odległości punktów bryły sztywnej nie zmieniają się pod wpływem działających sił. Bryła sztywna nie ulega więc odkształceniom.

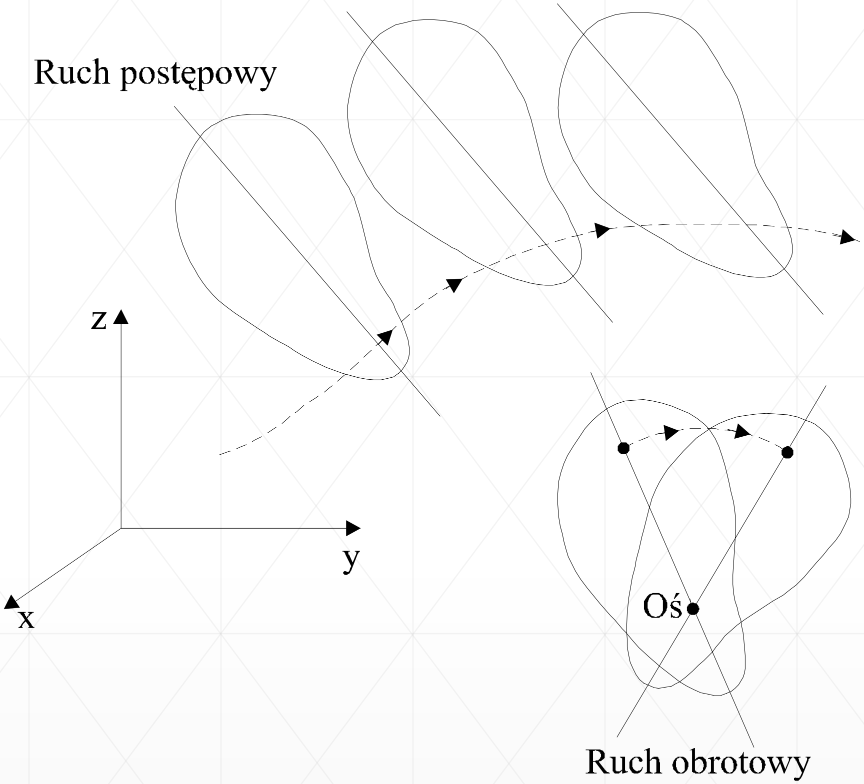


Odległość między punktami bryły wyznaczamy znając ich wektory wodzące w wybranym układzie współrzędnych:

$$\left|\vec{r}_j - \vec{r}_i\right| = \left|\vec{r}_{ij}\right| \qquad i, j = 1, 2, 3, \dots n$$

Wiele ciał rzeczywistych można traktować jako bryły sztywne, pod warunkiem, że działające siły są dostatecznie małe, by nie powodować odkształcenia ciała.

Ruch bryły sztywnej



Ruchem postępowym bryły sztywnej nazywamy taki ruch, w którym dowolna prosta przeprowadzona przez to ciało przesuwa się równolegle do samej siebie (wektory prędkości wszystkich punktów ciała są w danej chwili jednakowe).

Bryła sztywna porusza się **ruchem obrotowym**, jeżeli wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach, których środki leżą na jednej prostej, która nosi nazwę **chwilowej osi obrotu**.

Jeżeli położenie osi obrotu nie zmienia się, to nosi ona nazwę **stałej osi obrotu**.

Jest to oczywiście związane z definicją bryły sztywnej – odległości wzajemne między wszystkimi jej punktami pozostają stałe.

Środek masy

Momentem masowym pierwszego stopnia (**momentem statycznym**) **S** układu punktów materialnych względem dowolnego punktu O nazywamy sumę iloczynów mas punktów i ich wektorów wodzących względem punktu O układu współrzędnych:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

Jeżeli układ punktów jest ciągły i o stałej gęstości ρ, to:

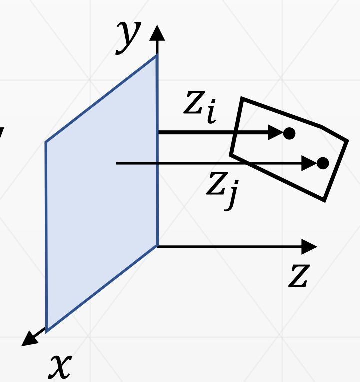
$$\vec{S} = \int \vec{r}\mathrm{d}m = \rho \iiint \vec{r}\mathrm{d}V,$$

gdzie $dV = dxdydz$ jest elementem objętości ciała.

Rozkładając równanie na moment statyczny względem kierunków kartezjańskiego układu współrzędnych znajdujemy składowe wektora $\vec{S}$:

$$\vec{S} = S_x\hat{\imath} + S_y\hat{\jmath} + S_z\hat{k}$$

gdzie np. $S_z = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i$



Suma iloczynów mas punktów i ich odległości od danej płaszczyzny nazywana jest **momentem statycznym względem płaszczyzny**:

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i; \qquad S_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,; \qquad S_{xz} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Środek masy

Przez porównanie otrzymujemy równania wiążące składowe momentu statycznego względem punktu z odpowiednimi momentami statycznymi względem płaszczyzn:

$$S_x = S_{yz} \qquad S_y = S_{xz} \qquad S_z = S_{xy}$$

Zawsze istnieje taki punkt ciała C (***środek masy ciała***), w którym można skupić całą masę ciała bez zmiany charakteru ruchu:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Środek masy ciała to punkt, który porusza się tak, jak gdyby była w mim skupiona cała masa ciała, a wszystkie siły zewnętrzne były przyłożone w tym właśnie punkcie.

Wartość momentu statycznego dla środka masy wynosi:

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i = m\vec{r}_C$$

Stąd można znaleźć położenie środka masy:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{S}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{\int_m \vec{r}\mathrm{d}m}{m}$$

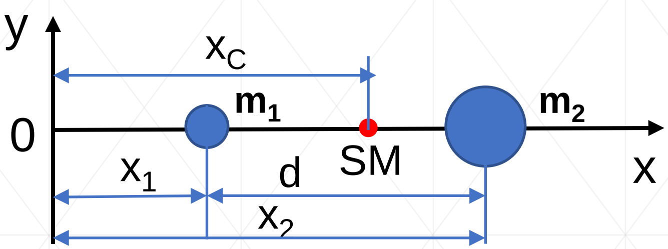
Wnioski:

1. Moment statyczny względem płaszczyzny lub względem punktu będącego środkiem masy, przechodzącej przez środek masy jest równy zero.
2. Jeżeli ciało jednorodne posiada środek, oś lub płaszczyznę symetrii, to środek masy będzie znajdował się na tej płaszczyźnie, osi lub w tym środku symetrii.

Wyznaczanie środka masy

Przykład 1

Wyznacz środek masy dwóch cząstek o masach $\mathbf{m_1}$ i $\mathbf{m_2}$ odległych od siebie o **d**.

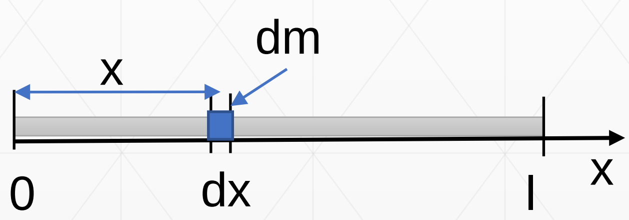


$$\vec{r}_C = \frac{\vec{S}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} \qquad x_C = \frac{S_x}{m} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Środek masy znajduje się bliżej cząstki o większej masie.

Przykład 2

Wyznacz środek masy cienkiego pręta o długości **l** i masie **m** względem jego końca.



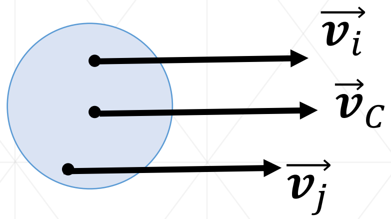
$$\vec{r}_C = \frac{\int_m \vec{r}\mathrm{d}m}{m} \qquad dm = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$$

$$x_C = \frac{\int_m x\mathrm{d}m}{m} = \frac{1}{m}\int_0^l x\frac{m}{l}\mathrm{d}x = \frac{1}{l}\frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{2}l$$

Środek masy znajduje się pośrodku pręta.

Ruch w układzie środka masy

W ruchu postępowym prędkości wszystkich punktów bryły sztywnej, a zatem i środka masy *C*, są takie same, czyli:



$$\vec{v_i} = \vec{v_j}$$

Oznaczając przez $\vec{r}_C$ promień wodzący środka masy, a przez $\vec{v}_C$ jego prędkość liniową dostajemy:

$$\vec{v_i} = \vec{v}_C$$

Wektor wodzący środka masy $\vec{r}_C$ jest związany z momentem statycznym bryły $\vec{S}$:

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{S}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} \quad \text{a stąd} \quad m\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Różniczkując powyższe wyrażenie dwukrotnie po czasie otrzymamy:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

Uzyskaliśmy **równanie ruchu postępowego bryły sztywnej.**

Wszystkie punkty bryły poruszają się tak, jak jej środek masy, którego ruch można znaleźć znając wypadkową siłę działającą na bryłę oraz jej masę.

Ruch w układzie środka masy

Pęd w ruchu postępowym bryły sztywnej

Pęd całej bryły jest równy sumie pędów poszczególnych jej punktów, czyli:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_C = \vec{v}_C \sum_{i=1}^{n} m_i = m\vec{v}_C = \vec{p}_C$$

Pęd bryły sztywnej w ruchu postępowym jest równy pędowi całkowitej masy bryły skupionej w jej środku masy.

Moment pędu w ruchu postępowym bryły sztywnej

Moment pędu całej bryły jest sumą momentów pędów poszczególnych jej punktów, czyli:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_C) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_C$$

Pierwszy czynnik jest **momentem statycznym pierwszego stopnia** $\vec{S} = m\vec{r}_C$:

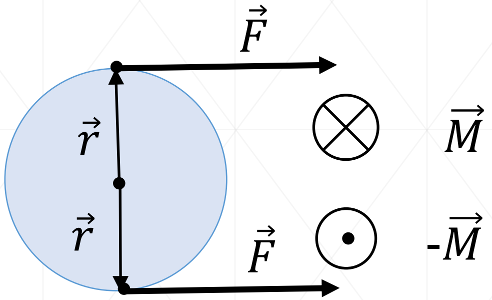
$$\vec{L} = m\vec{r}_C \times \vec{v}_C = \vec{r}_C \times m\vec{v}_C = \vec{r}_C \times \vec{p}_C = \vec{L}_C$$

Moment pędu bryły sztywnej w ruchu postępowym jest równy momentowi pędu punktu materialnego o masie tej bryły umieszczonego w środku masy tej bryły.

Ruch w układzie środka masy

Moment pędu bryły sztywnej w ruchu postępowym względem środka masy jest równy zeru. $\vec{L} = 0$ (bo $\vec{r}_C = 0$)

II zasada dynamiki dla momentu pędu ma postać $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$, więc prawdziwy jest następujący warunek ruchu postępowego bryły sztywnej:



Wypadkowy moment sił względem środka masy w ruchu postępowym bryły sztywnej jest równy zeru.

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Energia kinetyczna w ruchu postępowym bryły sztywnej

Energia kinetyczna bryły sztywnej jest sumą energii kinetycznych wszystkich punktów bryły:

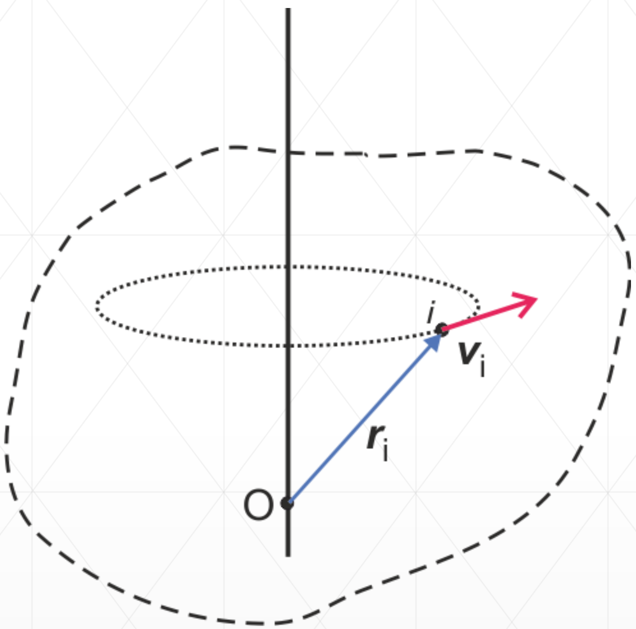
$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_k^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{m v_C^2}{2}$$

Energia kinetyczna ruchu postępowego bryły sztywnej jest równa energii kinetycznej całkowitej masy bryły skupionej w środku masy.

Ruch obrotowy bryły sztywnej

Rozważmy ruch względem stałej osi przechodzącej przez środek układu inercjalnego o początku *O*. Prędkość liniowa *i*-tego punktu wynosi $\vec{v}_i$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$$



Ponieważ prędkość kątowa jest stała dla wszystkich punktów bryły sztywnej ($\vec{\omega} = \vec{\omega}_i$) to:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Pęd bryły sztywnej w ruchu obrotowym

Pęd bryły sztywnej w ruchu obrotowym jest (podobnie jak w ruchu postępowym) równy sumie pędów poszczególnych punktów bryły:

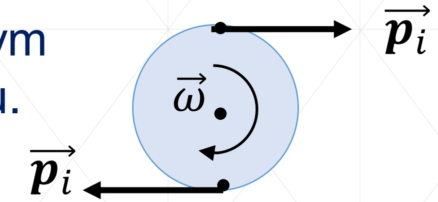
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = \vec{\omega} \times \vec{S} = m(\vec{\omega} \times \vec{r}_C) = m\vec{v}_C = \vec{p}_C$$

Pęd ruchu obrotowego bryły sztywnej jest równoważny pędowi masy bryły skupionej w jej środku masy C.

Ruch obrotowy bryły sztywnej

Jeżeli oś obrotu przechodzi przez środek masy bryły, to pęd w układzie związanym ze środkiem masy jest równy **zero** ponieważ moment statyczny $\boldsymbol{S} = 0$.

Suma pędów wszystkich punktów bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy bryły jest równa zeru.



Energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły sztywnej

Energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły sztywnej jest oczywiście sumą energii kinetycznych poszczególnych punktów bryły, czyli:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_k^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)}{2}$$

Wykorzystując tożsamość wektorową $(\vec{A} \times \vec{B})\vec{C} = \vec{A}(\vec{B} \times \vec{C})$, w której:

$$\vec{A} = \vec{\omega}_i;\ \vec{B} = \vec{r}_i;\ \vec{C} = (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)$$

otrzymujemy ogólny wzór na energię kinetyczną bryły sztywnej:

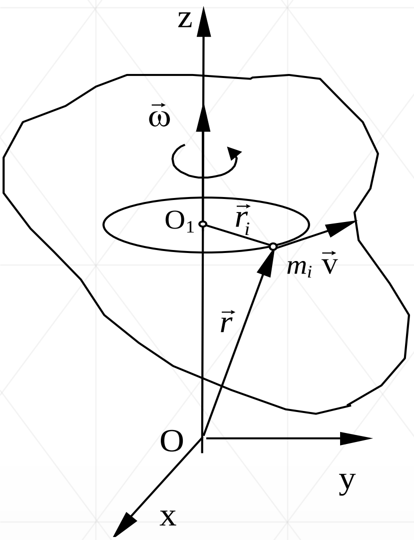
$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{\omega}[\vec{r}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)]}{2} = \frac{\vec{\omega}}{2} \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i)] =$$

$$= \frac{\vec{\omega}}{2} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \frac{\vec{\omega}}{2} \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \frac{\vec{L}\vec{\omega}}{2}$$

$\vec{\omega}_i = \vec{\omega}$

Moment bezwładności

Dla obrotu wokół stałej osi obrotu bryły sztywnej, prędkość kątowa może ulegać zmianie co do modułu i zwrotu natomiast jej kierunek pozostaje stały.



Moment pędu cząstki względem pewnego punktu określiliśmy jako iloczyn wektorowy promienia wodzącego cząstki poprowadzonego z tego punktu przez pęd tej cząstki, zatem dla ruchu obrotowego:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[m_i \vec{\omega} \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)}_{r^2} - m_i \vec{r}_i \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{0} \right] = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i^{\,2} \vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$I = \sum r_i^2 m_i$ nazywamy momentem bezwładności $\qquad \vec{L} = I\vec{\omega}$

Momentem bezwładności układu punktów materialnych (bryły sztywnej) względem wybranej osi obrotu nazywamy sumę iloczynów mas i kwadratów ich odległości od tej osi obrotu.

$$I = \int_m r^2 dm = \rho \iiint_V r^2 \mathrm{d}V$$

Twierdzenie Steinera

Twierdzenie Steinera dla momentów bezwładności:

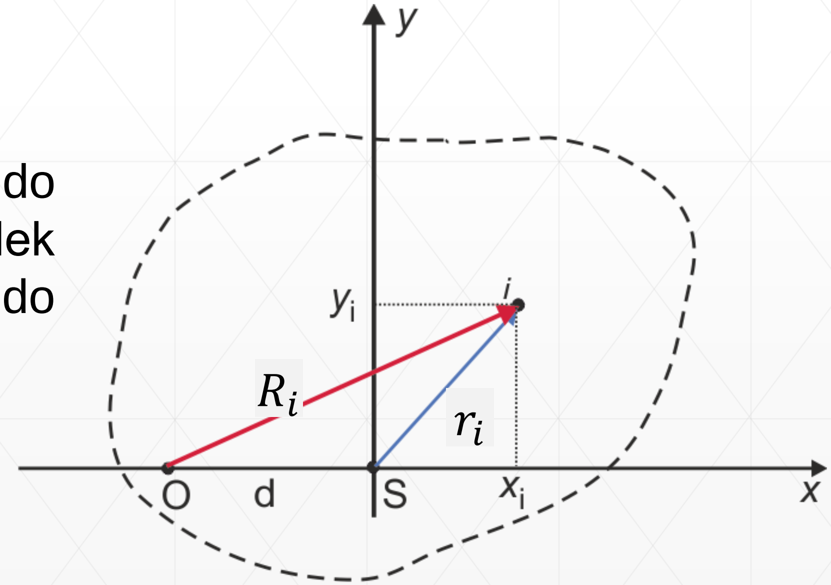
Momenty bezwładności względem osi nieprzechodzących przez środek masy ciała można obliczyć według następującej formuły:

$$I = I_c + md^2$$

gdzie I_C jest momentem bezwładności względem osi równoległej do rozpatrywanej i przechodzącej przez środek masy m, zaś d jest zaś odległością środka masy od osi.

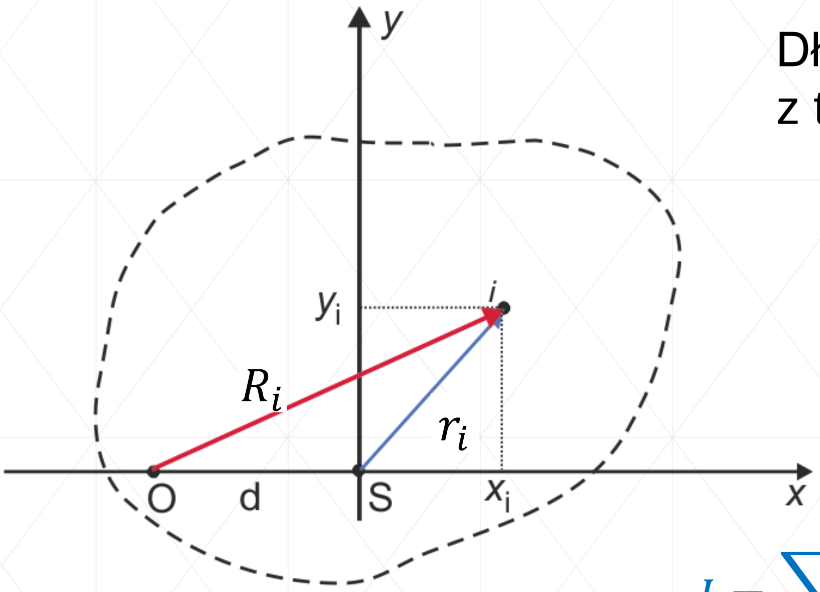
Dowód:

S – punkt przecięcia płaszczyzną rysunku osi do niej prostopadłej i przechodzącej przez środek masy C, O – punkt przecięcia osi równoległej do tamtej i znajdującej się w odległości d od niej.



Niech r_i jest odległością i-tego punktu o masie m_i od osi przechodzącej przez C, a R_i – jego odległością od drugiej osi.

Twierdzenie Steinera



Długość wektorów wodzących wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa: $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$

$$R_i^2 = (d + x_i)^2 + y_i^2 = d^2 + 2dx_i + x_i^2 + y_i^2$$
$$= d^2 + 2dx_i + r_i^2$$

Moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez O wynosi zatem:

$$I = \sum m_i R_i^2 = d^2 \sum m_i + 2d \sum m_i x_i + \sum m_i r_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

masa ciała

$$\sum m_i x_i = 0$$

dla środka masy

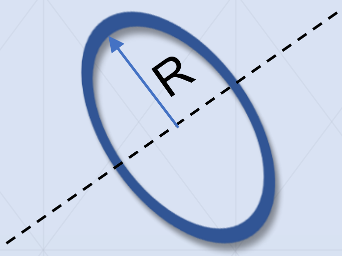
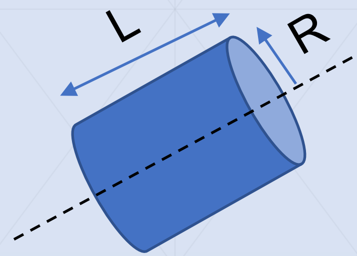
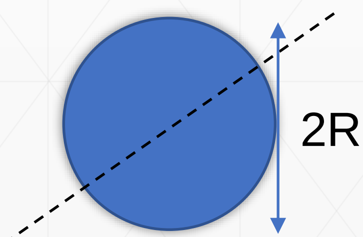
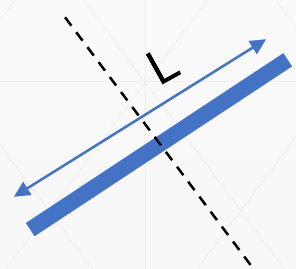
$$\sum m_i r_i^2 = I_C$$

moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek masy

Ostatecznie otrzymujemy zatem zależność wyrażającą **twierdzenie Steinera**:

$$I = I_C + md^2$$

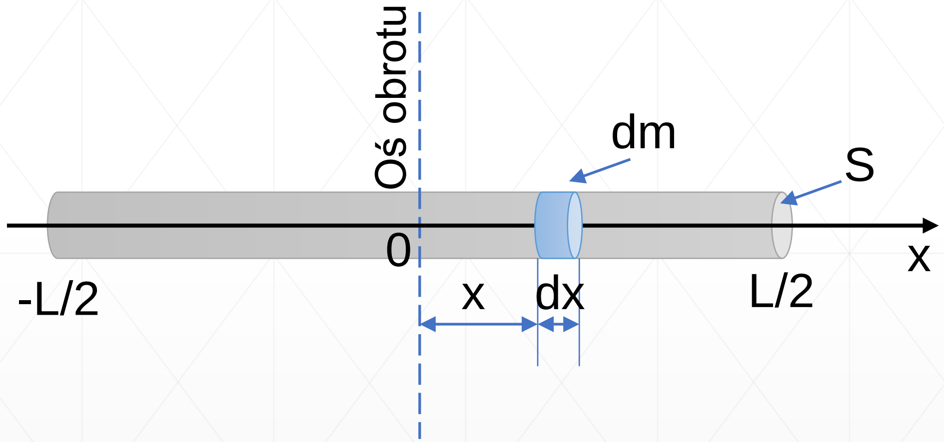
Momenty bezwładności brył

Bryła	Moment bezwład-ności	Bryła	Moment bezwład-ności
Obręcz – względem osi 	$I = mR^2$	Walec – względem osi 	$I = \frac{1}{2} mR^2$
Kula – względem śred. 	$I = \frac{2}{5} mR^2$	Pręt – ⊥ do osi 	$I = \frac{1}{12} mL^2$

Moment bezwładności pręta

Wyznaczmy moment bezwładności pręta o długości **L**, masie **m** i przekroju **S** obracającego się względem osi przechodzącej przez środek pręta

$$I = \sum r_i^2 m_i \qquad dI = r^2\,dm \qquad I = \int_m r^2 dm = \rho \iiint_V r^2 \mathrm{d}V$$



$$gęstość\ pręta\ \ \rho = \frac{m}{V}$$

$$I = \rho \int_{-L/2}^{L/2} x^2 S \mathrm{d}x = \rho S \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \rho S \frac{1}{12} L^3 = \rho S L \frac{1}{12} L^2 = \frac{1}{12} m L^2$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Dla każdego punktu bryły, spełniona jest II zasada dynamiki w postaci ogólnej:

$$\frac{d\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{M}_i$$

(Mnożąc wektorowo II zasadę dynamiki $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i$ dla ruchu postępowego punktu materialnego przez wektor wodzący tego punktu)

A wobec tego całkowity moment sił względem punktu *O* działający na bryłę jest równy sumie momentów sił względem tego punktu działających na każdy punkt bryły, czyli:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

Dla dowolnego ruchu obrotowego można zatem zapisać II zasadę dynamiki w następującej postaci ogólnej:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{I}\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{I}\vec{\varepsilon} \qquad E_k = \frac{\vec{L}\vec{\omega}}{2} \qquad E_k = \frac{(I\vec{\omega})\vec{\omega}}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Podobnie jak w przypadku ruchów postępowych z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego można wyprowadzić I zasadę która stwierdza, iż dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dla której moment siły jest zerowy moment pędu jest stały.

M-7_precesja bączka
M-8_precesja koła

Precesja pod wpływem siły ciężkości

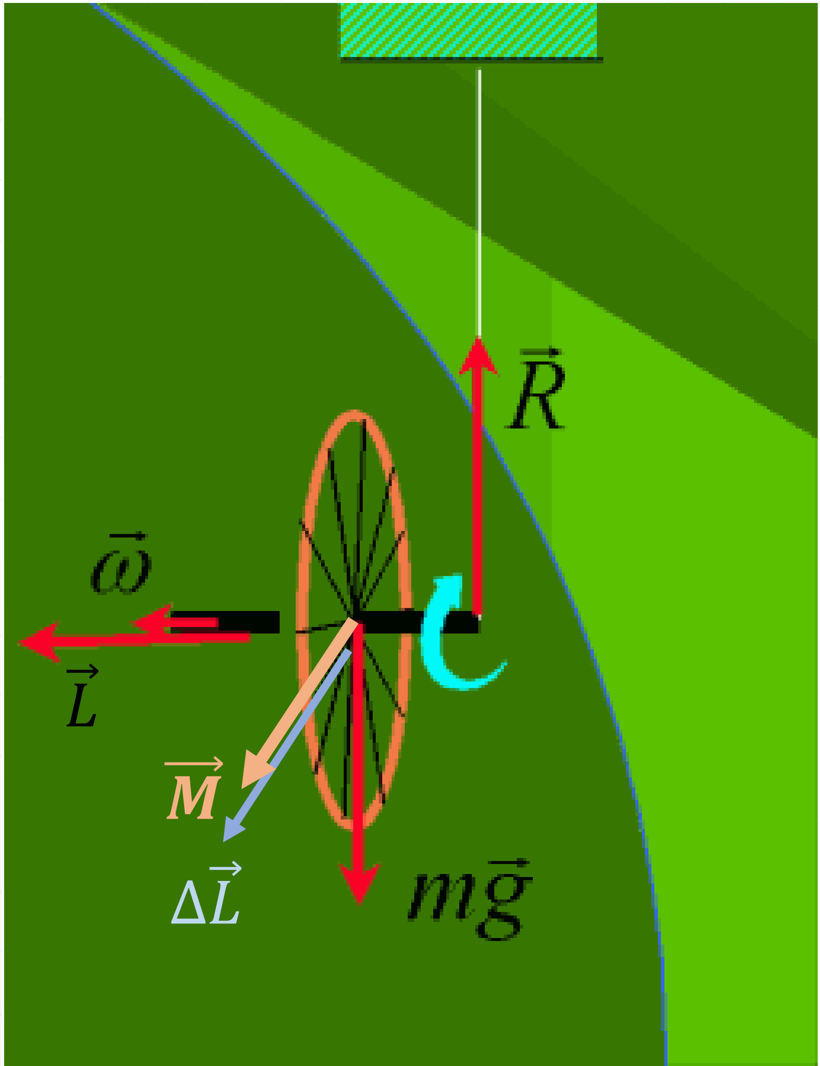
Na obracające się koło o momencie pędu $\vec{L}$ działa moment siły $\vec{M}$ powodujący zmianę $\Delta\vec{L}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{M} = \vec{r} \times \mathrm{m}\vec{g} \qquad \vec{R} = -m\vec{g}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$$

$$\vec{L}' = \vec{L} + \Delta\vec{L}$$

moment siły, tak więc i zmiana momentu pędu jest skierowana w naszą stronę w płaszczyźnie poziomej powodując precesję



Podsumowanie

Dynamika bryły sztywnej musi uwzględniać rozmiary ciała oraz rozkład przestrzenny masy ciała, czyli jego kształt, a także punkt przyłożenia siły wywołującej ruch względem środka masy bryły.

Dlatego zamiast siły $\vec{F}$ oraz masy m do opisu II zasady dynamiki stosujemy odpowiednio moment siły $\vec{M}$ (uwzględniający punkt przyłożenia siły) oraz moment bezwładności I (uwzględniający rozkład masy bryły).

Ruch bryły sztywnej może być traktowany jako kombinacje ruchu postępowego oraz obrotowego.

Dla ruchu postępowego najlepiej jest wykorzystać pojęcie środka masy (punktu w którym podparcie bryły nie powoduje jej ruchu).

Dla ruchu obrotowego względem stałej osi obrotu wprowadzane jest pojęcie momentu bezwładności – wówczas II zasada dynamiki ma postać jak dla punktu materialnego: $\vec{M} = \mathrm{I}\vec{\varepsilon}$ $\quad$ $\vec{F} = \mathrm{m}\vec{a}$

Twierdzenie Steinera pozwala na wyrażenia momentu pędu bryły dla dowolnej osi.