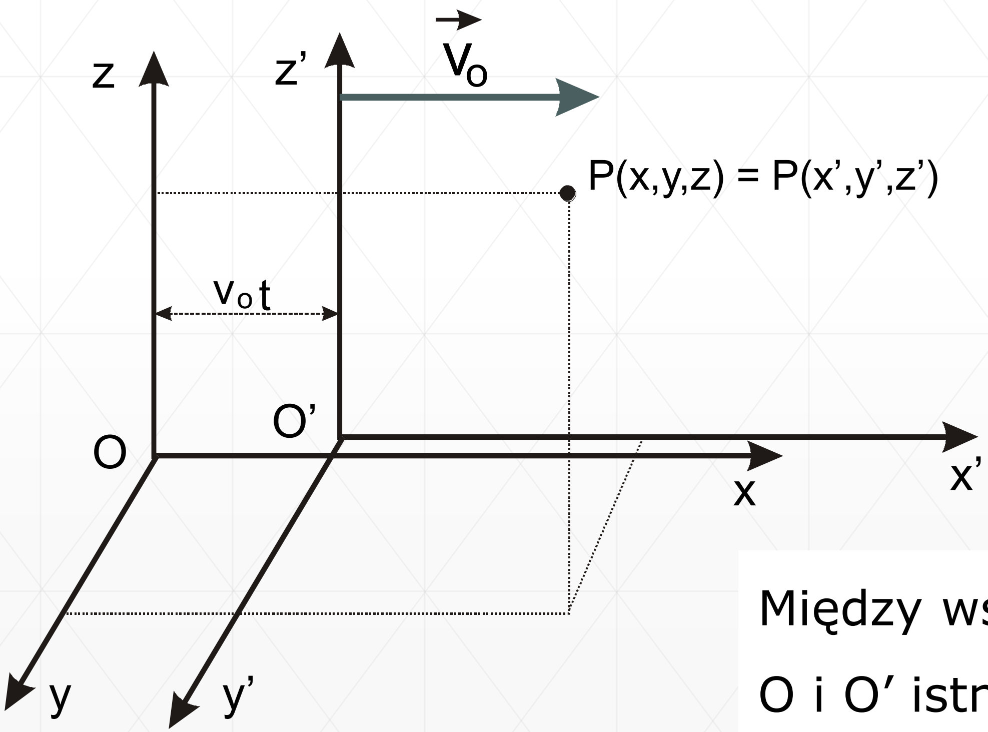
7. Niezmienniczość Galileusza

- układy inercjalne – transformacje Galileusza,
- układy nieinercjalne,
- siły pozorne,
- wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania.

Niezmienniczość Galileusza

Rozważmy układ O (*xyz*) pozostający w spoczynku oraz układ O′ (*x′y′z′*) poruszający się wzdłuż osi *x* układu O ze stałą prędkością v_0= const. (czyli **ruchem jednostajnym jednowymiarowym**).



Dla chwili czasu $t_0 = 0$ układy O i O′ są tożsame. Ponadto zakładamy, że czas w obu układach płynie jednakowo, czyli $t' = t$

Między współrzędnymi punktu P w układach O i O′ istnieją następujące związki:

$$x' = x - v_0 t; \qquad y' = y; \qquad z' = z$$

Niezmienniczość Galileusza

Układ czterech równań:

$$x' = x \pm v_0 t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t = t'$$

tworzy tzw. transformację (przekształcenie) Galileusza.

Znak „+/-"zależy od tego, w którą stronę osi Ox porusza się układ ruchomy O' (- gdy w kierunku osi Ox, + gdy w kierunku przeciwnym)

Transformacja Galileusza umożliwia przeliczenie parametrów ruchu z nieruchomego układu odniesienia do układu poruszającego się lub odwrotnie.

Niezmienniczość Galileusza

Jeżeli punkt P ma w układzie O prędkość:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

to różniczkując współrzędne w układzie O′ (określone na bazie transformacji Galileusza z układu O) otrzymamy prędkość tego punktu w układzie O′:

$$v_x'(t) = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[x(t) - v_0 t]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - v_0 = v_x(t) - v_0$$

$$v_y'(t) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y\ (t)$$

$$v_z'(t) = v_z\ (t)$$

gdzie v_0 jest prędkością poruszania się układu ruchomego względem układu nieruchomego.

Niezmienniczość Galileusza

Różniczkując prędkość otrzymamy z kolei przyspieszenie punktu w układzie O′

$$a_x{}'(t) = \frac{\mathrm{d}v_x'}{dt} = \frac{d[v_x(t) - v_0]}{dt} = \frac{dv_x(t)}{dt} = a_x(t)$$

A ponieważ założyliśmy ruch tylko wzdłuż osi Ox, to:

$$a_y{}'(t) = \frac{dv_y'}{dt} = \frac{dv_y(t)}{dt} = a_y(t)$$

$$a_z{}'(t) = \frac{dv_z'}{dt} = \frac{dv_z(t)}{dt} = a_z(t)$$

Transformacja Galileusza jest niezmiennicza względem przyspieszenia i oczywiście czasu (bo to założyliśmy).

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$$

$$t' = t$$

Układy inercjalne i nieinercjalne

Układ inercjalny – układ odniesienia poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostający w spoczynku względem innego układu.

Zasada względności Galileusza: wszystkie układy, które poruszają się względem siebie bez przyspieszenia, czyli ruchem jednostajnym prostoliniowym, są równoważne mechanicznie.

Jeśli układ O' porusza się względem układu O ze stałą prędkością, to przyśpieszenie punktu materialnego jest w obu układach jednakowe.

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$$

Układ nieinercjalny – układ odniesienia poruszający się ruchem prostoliniowym zmiennym lub krzywoliniowym względem innego układu.

W tym przypadku nie jest spełniona zasada względności Galileusza. Na ciało w nieinercjalnym układzie odniesienia działają przyspieszenia pozorne. Zjawisko to nazywamy ***bezwładnością*** ciała, czyli tendencją ciała do zachowania stanu ruchu.

Układy inercjalne i nieinercjalne

Każdy z nas jechał kiedyś tramwajem na stojąco i wie, że podczas hamowania wydaje się działać na nas siła pchająca nas do przodu, a podczas przyspieszania jakaś niewidzialna siła pcha nas do tyłu.

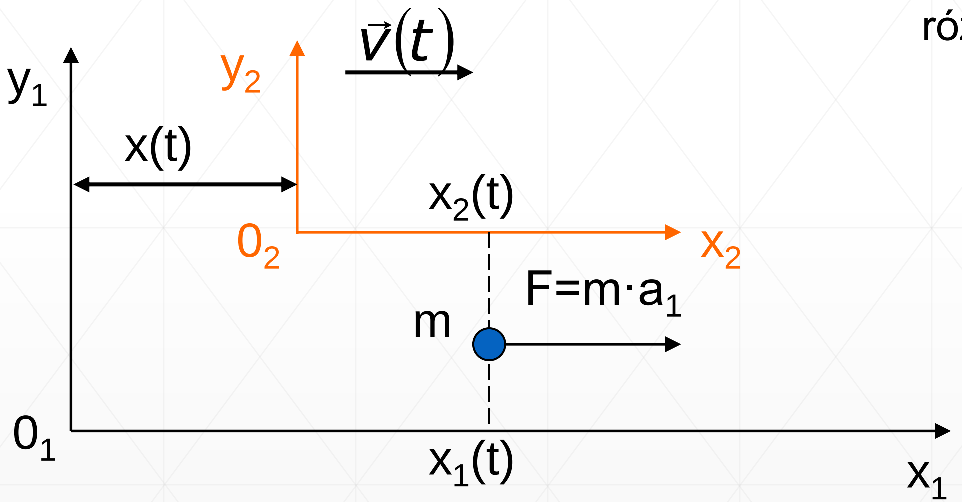
W rzeczywistości nie ma takiej siły!

Nasze ciało znajduje się bowiem w układzie tramwaju, poruszającym się z przyspieszeniem, a więc nieinercjalnym.

Tramwaj zwalnia, a nasze ciało porusza się dalej ruchem jednostajnym takim, jak poprzednio tramwaj, czyli zachowuje dotychczasowy stan ruchu. Zatem chwilowo ma prędkość wyższą (hamowanie) lub niższą (przyspieszanie) od tramwaju.

Układy nieinercjalne

Rozważmy ruch ciała o masie *m* poruszającym się wzdłuż osi x_1 pod wpływem działania siły $F=ma_1$. Układ 0_2 porusza się ruchem niejednostajnym prostoliniowym z prędkością *v* i przyspieszeniem *a*



$$x_2(t) = x_1(t) - x(t)$$

różniczkując po czasie $\quad a = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$

$$a_2 = a_1 - a$$

Gdy $a\neq0$ to układ 0_2 nazywamy układem **nieinercjalnym**

$$ma_2 = ma_1 - ma$$

$$ma_2 = F - ma$$

W układzie 0_2 nie obowiązują zasady dynamiki Newtona:

- gdy $F=0$ to ciało porusza się z przyspieszeniem $-a$
- iloczyn masy i przyspieszenia nie równa się sile działającej

Cechy układów nieinercjalnych

- Przyspieszenie (siła) nie są niezmiennicze przy przejściu z jednego układu do drugiego

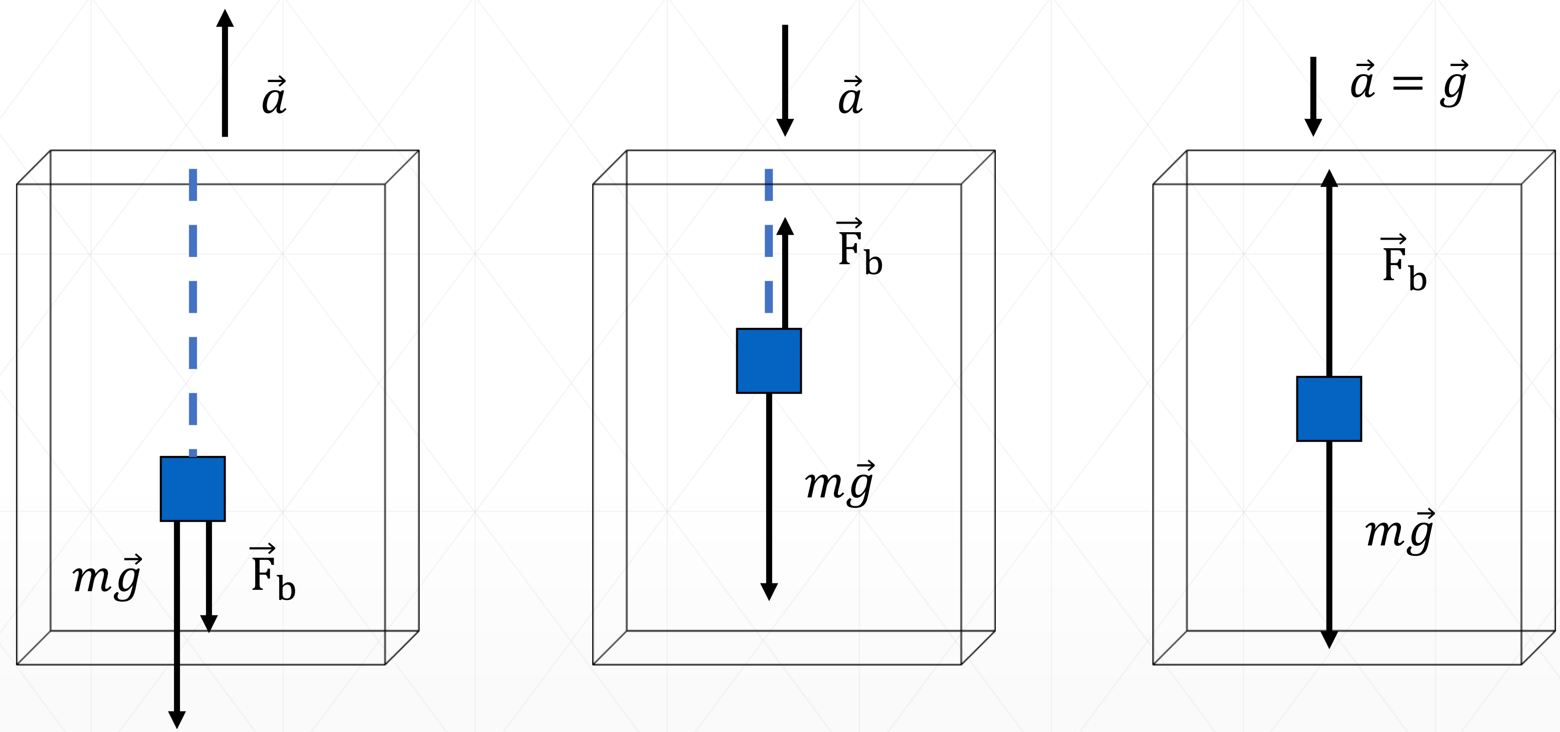
$$\mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}_2 = m\vec{\mathrm{a}}_1 - m\vec{a} \qquad\qquad \mathrm{m}\vec{\mathrm{a}}_2 = \vec{F} + \vec{F}_b$$

gdzie $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{b}} = -m\vec{a}$ siła bezwładności

- W układzie nieinercjalnym do sił rzeczywiście działających trzeba dodać siły bezwładności (siły pozorne) – zmodyfikowane drugie prawo Newtona

- Przyspieszający lub hamujący samochód, winda, ale również jazda na zakręcie.

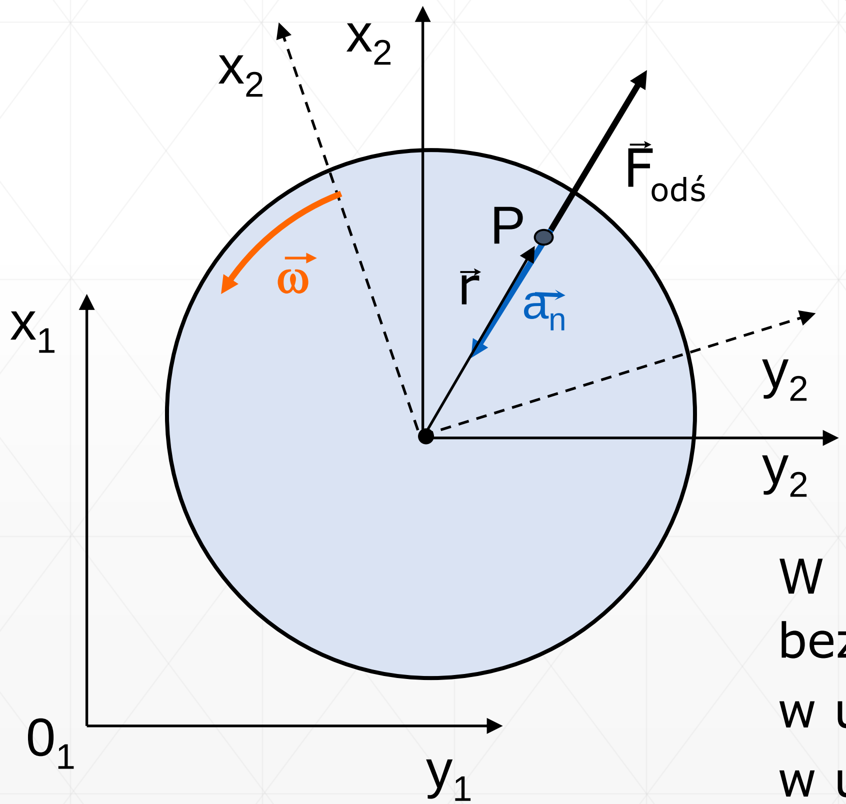
Masa m zawieszona na sprężynie w windzie poruszającej się ruchem niejednostajnym z przyspieszeniem a



$\vec{F}_2 = \vec{F} + \vec{F}_b$	$\vec{F}_2 = \vec{F} - \vec{F}_b$	$\vec{F}_2 = 0$
winda do góry sprężyna rozciąga się	winda do dołu sprężyna kurczy się	winda do dołu z *g* masa lewituje

Wirujący układ odniesienia

Układ O_2 wiruje wokół osi Z ze stała prędkością kątową ω



Ciało P porusza się pod wpływem przyspieszenia normalnego $\vec{a}_n$

$$a = a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{r}$$

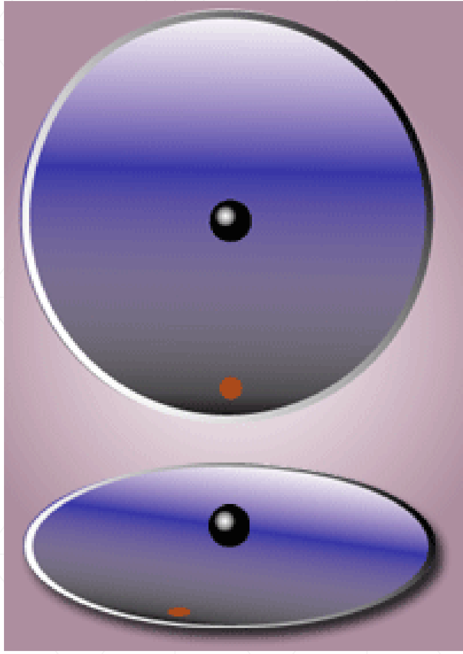
$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_n = m\omega^2\vec{r} = \vec{F}_{odś}$$

W przypadku ruchu po okręgu siła bezwładności $\vec{F}_b$ jest siłą odśrodkową $\vec{F}_{odś}$;

w układzie 0_1 – działa siła dośrodkowa;

w układzie 0_2 – siła odśrodkowa równoważy siłę dośrodkową, ciało spoczywa.

Siły bezwładności w ruchu obrotowym



- Układ 0_2 wiruje ze stałą prędkością kątową ω

$$m\vec{a}_2 = m\vec{a}_1 - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_2) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}_2$$

siła odśrodkowa

siła Coriolisa

$$v_s = \omega r$$

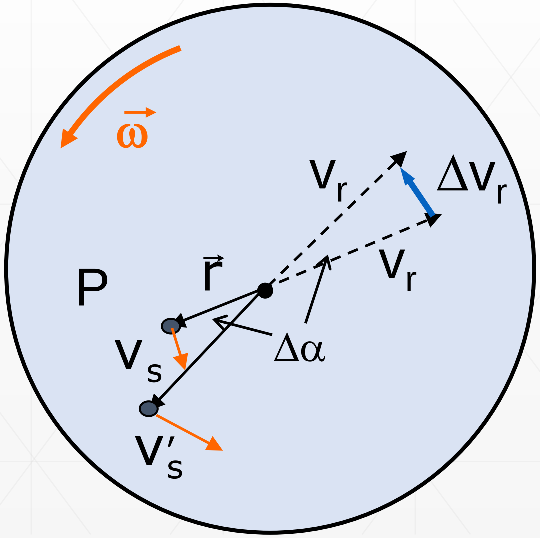
$$v_s' = \omega(r + \Delta r)$$

Gdy punkt przesuwa się z prędkością v_r po promieniu to zmienia wartość prędkości stycznej i kierunek radialnej

$$\Delta v_r = v_r \Delta\alpha \quad a_1 = \frac{\Delta v_r}{\Delta t} = v_r \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = v_r \omega$$

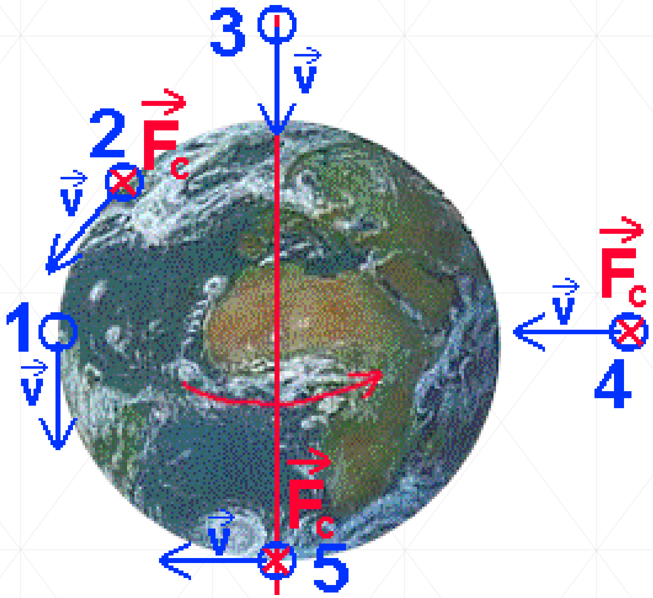
$$\Delta v_s = v_s' - v_s = \omega r \qquad a_2 = \frac{\Delta v_s}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} = \omega v_r$$

$$a = a_1 + a_2 = 2\omega v_r \qquad bo \quad \vec{\omega} \perp \vec{v}_r$$

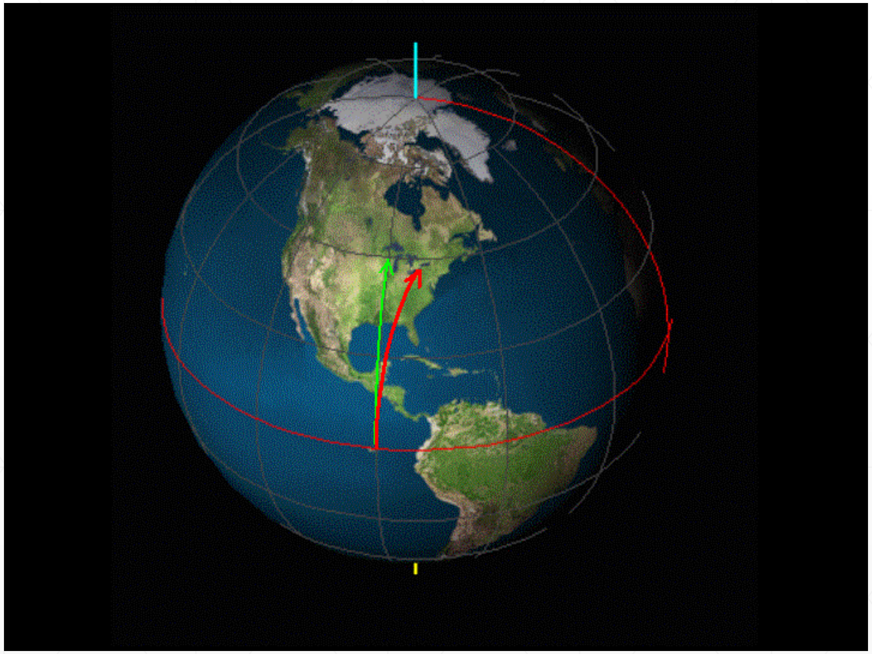


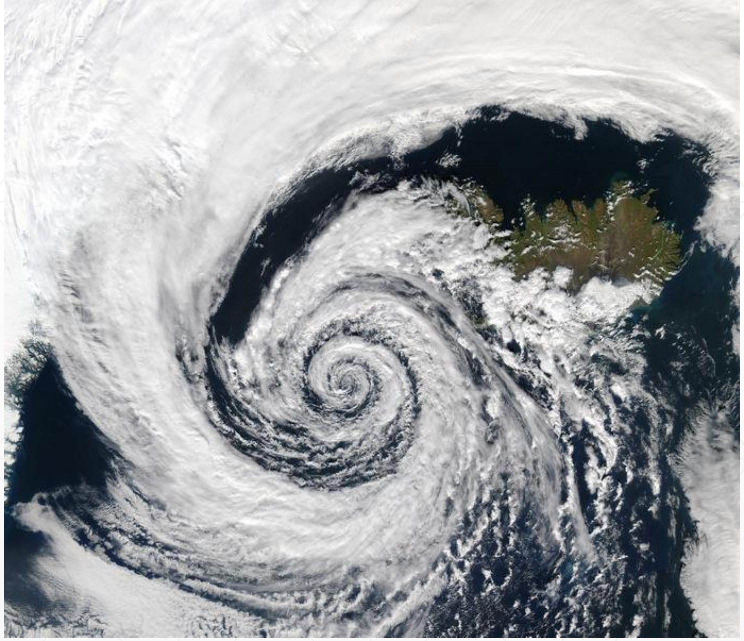
- siła Coriolisa nie występuje jeżeli:
  - prędkość ciała względem 0_2 jest zerowa
  - prędkość ciała w układzie 0_2 jest skierowana w kierunku osi obrotu

Przykłady działania siły Coriolisa



- podmywanie przez wodę prawych brzegów rzek na półkuli północnej
- zawirowania powietrza – cyklony
- odchylenie od pionu spadających swobodnie przedmiotów





Ziemia jest takim nieinercjalnym układem obracającym się (z W na E) układem odniesienia. Dlatego tor ciała poruszającego się np. od równika ku biegunowi północnemu ulegają nieznacznemu odchyleniu w kierunku E.

Układy nieinercjalne

Nie inercjalność wynikająca
z obrotu Ziemi

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{R_z} = \omega^2 R_z = \frac{4\pi^2 R_z}{T^2} \approx 3{,}4 \cdot 10^{-2} \mathrm{m/s^2}$$

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{R} \approx 6 \cdot 10^{-3} \mathrm{m/s^2}$$

Nie inercjalność wynikająca z ruchu Ziemi wokół Słońca (v=30 km/s, R=150$\cdot 10^6$ km)

Nie inercjalność wynikająca z ruchu Słońca wokół Galaktyki (v=300 km/s R=3$\cdot 10^{20}$ m)

$$a = \frac{\mathrm{v}^2}{R} \approx 3 \cdot 10^{-10} \mathrm{m/s^2}$$

Wg Macha ***jedynie układ odległych gwiazd stałych jest w miarę dobrym układem inercjalnym*****.**

Wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania

Dzięki rachunkowi całkowemu otrzymujemy bardziej uniwersalne sformułowanie kinematyki.

Rachunek całkowy.

Całkowanie jest działaniem odwrotnym względem różniczkowania. Polega na znalezieniu dla badanej funkcji *f(x)* tzw. funkcji pierwotnej *F(x)*, której pochodna w każdym punkcie przedziału $F'(x) = f(x)$

Funkcja pierwotna jest wyznaczana z dokładnością do dowolnej stałej C, gdyż $(F(x)+C)'=f(x)$

Sumę $F(x)+C$ nazywamy całką nieoznaczoną f(x) i oznaczamy symbolem

$$\int 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + C$$

$$\int f(x)dx$$

funkcja podcałkowa

zmienna całkowania

$$\underbrace{\int \ldots\ldots dx}_{\text{symbol całkowania}}$$

bo

$$\left(\frac{2}{3}x^3 + C\right)' = \frac{2}{3}\cdot 3x^2 = 2x^2$$

Całka oznaczona

Jeżeli F(x) jest funkcją pierwotną funkcji f(x) to całką oznaczoną funkcji *f(x)* w przedziale [a,b] nazywamy

górna

dolna

granica całkowania

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Przykład:

$$\int_1^4 xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_1^4 = \frac{1}{2}(4^2 - 1^2) = 7{,}5$$

Całka jako suma

znajomość prędkości pozwala obliczyć drogę przebytą przez punkt materialny

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad ds = v dt \qquad s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

całka oznaczona

Dzielimy odstęp czasu $t_2 - t_1$ na *N* małych odstępów Δt_1, Δt_2, ... Δt_N,

Drogę przebytą przez cząstkę liczymy jako sumę dróg Δs_1, Δs_2, ...Δs_N, przebytych w powyższych odstępach czasu $\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i$

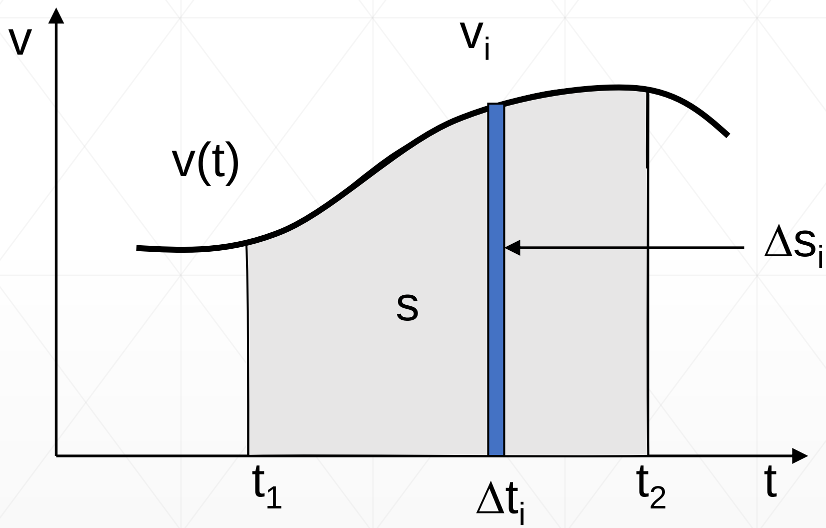
$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \cdots \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i \approx \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i$$

Droga jest tym dokładniej policzona im mniejsze są odcinki czasu Δt_i

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

Graficzna interpretacja całki

Rozważmy wykres zależności prędkości od czasu



Przebytą drogę można interpretować jako pole powierzchni figury ograniczonej krzywą v(t) i prostymi $t = t_1$ i $t = t_2$

Iloczyn $v_i \Delta t_i$ jest równy polu powierzchni paska Δs_i a suma tych pasków równa jest polu figury

$$s = \sum_i \Delta s_i = \sum_i v_i \Delta t_i$$

całka oznaczona równa jest polu pod krzywą

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

Równanie ruchu

Jeśli funkcja przyspieszenia $a(t)$ jest znana, poprzez całkowanie możemy znaleźć także funkcje prędkości $v(t)$ i położenia $x(t)$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \int \vec{a}\, dt$$

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{r} = \int \vec{v}\, dt$$

Dla ruchu prostoliniowego

$$v = \int a\, dt$$

$$x = \int v\, dt$$

Z równania ruchu można otrzymać prędkość i tor ciała w dowolnej chwili czasu, odtworzyć ruch przeszły i przewidzieć poruszanie się w przyszłości $\Rightarrow$ charakter deterministyczny

Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego

Wyznaczmy prędkość i położenie w ruch jednowymiarowy o a = const.

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = a dt$$

całkując obie strony równania

$$\int dv = \int a dt$$

$$v = a\int dt = at + C_1$$

stałą C_1 wyznaczamy z warunku początkowego

$$v(t=0) = v_0$$

$$v_0 = C_1$$

czyli

$$\boxed{v = at + v_0}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt$$

całkując obie strony równania

$$\int dx = \int v dt$$

$$x = \int v dt = \int (at + v_0) dt = a\int t\, dt + v_0 \int dt = \frac{at^2}{2} + v_0 t + C_2$$

znając x_0 – położenie w początkowej chwili czasu $t_0=0$

$$x(0) = x_0 = C_2$$

czyli

$$\boxed{x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0}$$

Hamująca motorówka

Motorówka płynie ze stałą prędkością 5 m/s, kiedy zaczyna hamować, doznając przyspieszenia zależnego od czasu $a(t) = -t/4$ m/s^2. Wyznaczyć i narysować zależność prędkości i położenia motorówki od czasu.

Prędkość:

$$v = \int a\,dt = \frac{-1}{4}\int t\,dt + C_1 = \frac{-1}{8}t^2 + C_1$$

stałą C_1 wyznaczamy z warunku początkowego

$$v(t=0) = 5$$

$$C_1 = 5$$

czyli

$$v = \frac{-1}{8}t^2 + 5$$

Położenie:

$$x = \int v dt = \int \left(\frac{-1}{8}t^2 + 5\right) dt = \frac{-1}{8}\int t^2\,dt + 5\int dt = \frac{-t^3}{24} + 5t + C_2$$

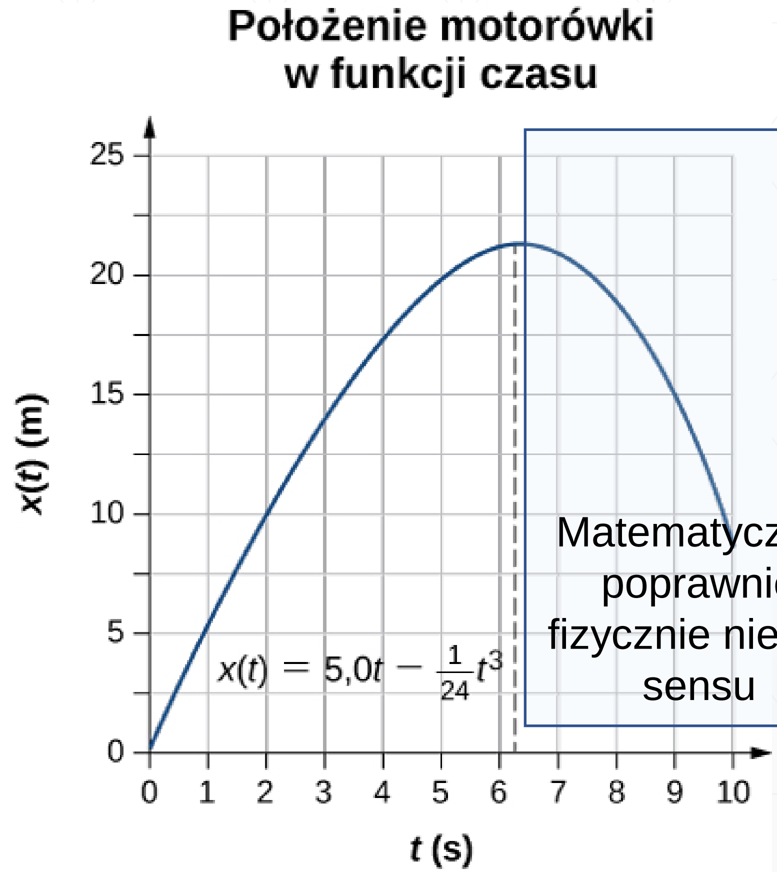
Przyjmując, że położenie wyznaczamy od momentu hamowania tj. $x(0) = 0$

$$C_2 = 0$$

czyli

$$x = \frac{-t^3}{24} + 5t$$

Zależności prędkości i położenia motorówki od czasu



Matematycznie poprawnie fizycznie nie ma sensu

$$v = \frac{-1}{8}t^2 + 5 = 0 \qquad t = \sqrt{40} = 6{,}3\ s$$

czas po którym motorówka się zatrzyma

Podsumowanie

- **układ odniesienia** – inercjalne i nieinercjalne

transformacje Galileusza $x' = x \pm v_0 t; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t = t'$

- przyspieszenie i czas jako niezmienniki transformacji Galileusza
- przykłady przyspieszeń pozornych w układach nieinercjalnych
- siły bezwładności w ruchu obrotowym: odśrodkowa i Coriolisa
- całka jako suma – sens fizyczny
- wyznaczanie równań ruchu metodą całkowania