6. Praca i energia

- praca siły,
- energia kinetyczna i potencjalna,
- moc,
- dynamika punktu materialnego w ruchu obrotowym,
- siła dośrodkowa.

Energia

- Ruch ciał, oprócz analizy równań ruchu, można badać również w inny sposób wykorzystując pojęcie energii. Termin energia ma dość szerokie znaczenie, ale ogólnie można powiedzieć, że jest to wielkość skalarna charakteryzująca stan ciała lub układu ciał pod względem jego zdolności do wykonywania pracy (ruchu ciała).
- Energia może występować jako energia mechaniczna, elektryczna, jądrowa, promienista i inna.
- Gdy przekazywanie energii odbywa się dzięki przyłożeniu do ciała siły mówimy, że siła wykonuje **pracę** nad ciałem.

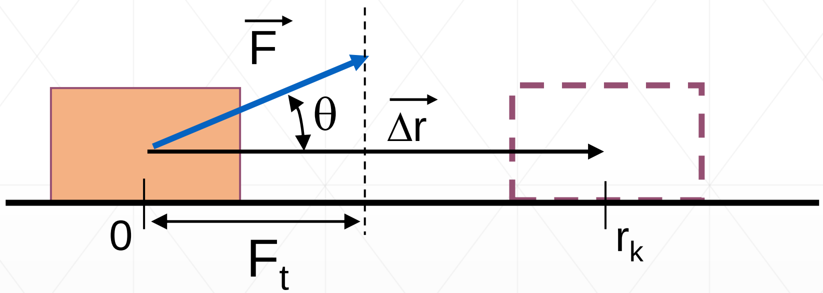
Praca W jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana poprzez działanie na ciało siłą.

Praca siły

Siła działająca na poruszające się ciało wykonuje pracę nad tym ciałem

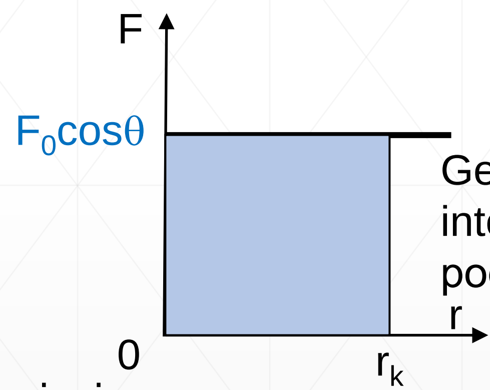
Praca wykonana nad ciałem w czasie jego przemieszczania na drodze Δr przez stałą siłę $\vec{F}$ jest iloczynem skalarnym sił $\vec{F}$ i wektora przemieszczenia $\Delta\vec{r}$

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}$$



$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F\cos\theta \cdot \Delta r$$

gdzie θ oznacza kąt między kierunkiem siły i przesunięcia



Geometryczna interpretacja pracy – pole pod krzywą F(r)

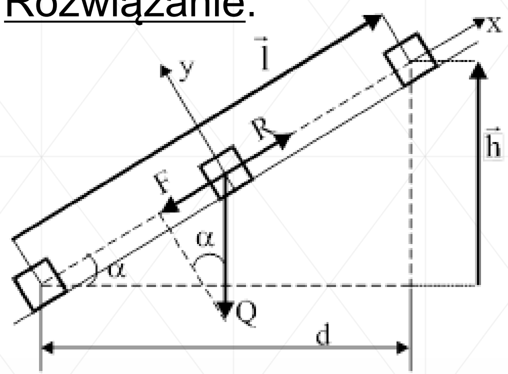
Praca wykonana nad ciałem może mieć różny znak. Jeśli składowa wektora siły w kierunku wektora przemieszczenia w stosunku do wektora przemieszczenia:

- jest skierowana zgodnie – dodatnia ($\theta < 90°$ $W>0$ siły napędowe)
- jest skierowana przeciwnie – ujemna ($\theta > 90°$ $W<0$ siły oporowe)
- są do siebie prostopadłe - zerowa

Przykład na wyznaczanie pracy wykonanej przez stałą siłę

Przykład: Jaką pracę W wykonał człowiek przesuwający klocek o masie m = 10 kg z podstawy na szczyt równi pochyłej mającej długość l = 5 m i wysokość h = 3 m. Człowiek przesuwa klocek ze stałą prędkością siłą R równoległą do równi.

<u>Rozwiązanie</u>:



Ponieważ przesuwanie klocka wzdłuż osi x odbywa się bez przyspieszenia, ruchem jednostajnym, zatem II zasada dynamiki przyjmie postać:

$$\sum F = R - F = 0.$$

Z rysunku wynika, że $F = Q \cdot \sin\alpha,$

gdzie $Q = m \cdot g$ to ciężar klocka, a $\sin\alpha = \frac{h}{l},$

Czyli $R = mg\frac{h}{l},$ $\qquad R = 10\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{3\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m}}$ $\qquad R \cong 58{,}8\ \mathrm{N}.$

Praca W wykonana przez siłę R na drodze l wynosi

$$\mathrm{W} = R \cdot l \qquad \mathrm{W} = 58{,}8\ \mathrm{N} \cdot 5\ \mathrm{m} = 294\ \mathrm{J}.$$

<u>Odpowiedź:</u>

Człowiek przesuwając klocek na szczyt równi pochyłej wykonał pracę równą 294 J.

Praca siły zmiennej w czasie

Siła zmienia się na odcinku $x_{pocz} \rightarrow x_{konc}$
Wybieramy tak małe Δx, że siła F jest stała
Praca ΔW_j wykonana przez siłę F na odcinku Δx

$$\Delta W_j = F_j \Delta x$$

Całkowita praca W to suma ΔW_j

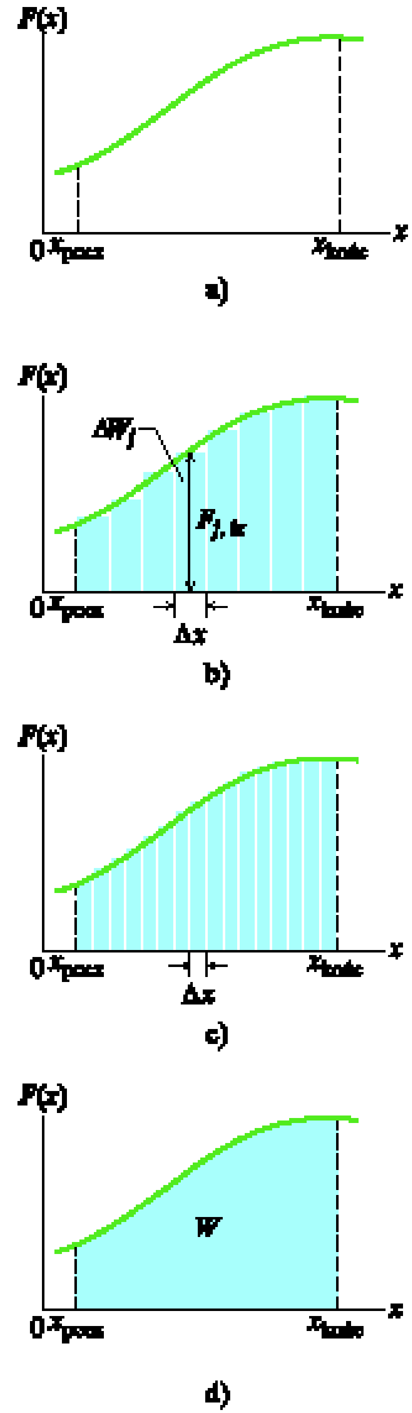
$$W = \sum \Delta W_j = \sum F_j \Delta x$$

Gdy szerokość odcinka Δx dąży do zera to sumowanie zastępujemy całkowaniem:

$$W = \int_{x_{pocz}}^{x_{konc}} F(x)\, dx$$

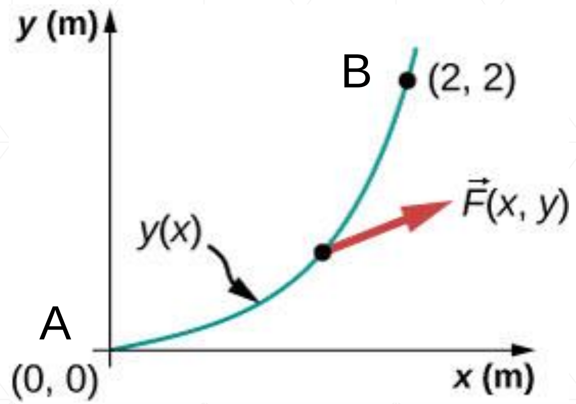
W przypadku trójwymiarowym:

$$\boxed{W = \int_{\vec{r_p}}^{\vec{r_k}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_p}^{x_k} F_x dx + \int_{y_p}^{y_k} F_y dy + \int_{z_p}^{z_k} F_z dz}$$



Przykład na pracę z całkowaniem

Przykład: Ciało porusza się w płaszczyźnie XY po torze w kształcie paraboli opisanej równaniem $y = 0{,}5\,x^2$ od punktu A w początku układu współrzędnych do punktu B o współrzędnych (2, 2) [m] na skutek działania siły $\vec{F} = (5y, 10x)N$. Oblicz pracę wykonaną przez tą siłę.



$$\mathrm{W} = \int_{\overrightarrow{r_p}}^{\overrightarrow{r_k}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 5y dx + \int_0^2 10x dy$$

$$y = 0{,}5\,x^2$$

$$\vec{F} = (5y, 10x) \qquad \overrightarrow{dr} = (dx, dy)$$

$$dy = x\,dx$$

$$\mathrm{W} = \int_0^2 2{,}5x^2 dx + \int_0^2 10x^2 dx = 12{,}5 \cdot \left|\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 12{,}5 \cdot \frac{8}{3} = 33{,}3\,J$$

Energia mechaniczna

Energia może zmieniać swą postać jednakże nie może zniknąć ani być stworzona z niczego. Nasze rozważania ograniczymy tylko do energii mechanicznej, która może występować pod postacią:

- **energii kinetycznej** E_k związanej z ruchem ciała – im ciało szybciej się porusza tym większa jest jego energia kinetyczna; $E_k = \frac{1}{2}mv^2$
- **energii potencjalnej** E_p związanej z konfiguracją (czyli ustawieniem) układu ciał działających na siebie siłami. Jednym z rodzajów energii potencjalnej jest grawitacyjna energia potencjalna związana z odległością ciał przyciągających się siła grawitacji. $E_p = mgh$
- Całkowita **energia mechaniczna** jest sumą tych energii:

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh$$

Praca i energia kinetyczna

Energia kinetyczna: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ 1 dżul = 1 J = 1 kgm^2/s^2

- im szybciej porusza się ciało tym większa jest jego E_k
- zwiększanie prędkości pod wpływem działania siły – siła wykonuje pracę nad ciałem

Praca W jest to energia przekazana ciału lub od niego odebrana na drodze działania na to ciało siły. Gdy energia przekazywana jest ciału to W > 0, a gdy odbierana to W < 0.

Praca wykonana przy rozpędzeniu ciała do prędkości v:

$$W = \int_0^s Fds = \int_0^s mads = \int_0^s m\frac{dv}{dt}ds = \int_0^v m\frac{ds}{dt}dv = m\int_0^v vdv = \frac{mv^2}{2}$$

Zmiana energii kinetycznej ciała jest równa całkowitej pracy wykonanej nad ciałem:

$$\Delta E_k = E_{k\,koń} - E_{k\,pocz} = W$$

Równoważność pracy i energii potencjalnej

Ciało o masie m położone na wysokości h nad pewnym poziomem odniesienia (za który przyjmuje się najczęściej powierzchnię kuli ziemskiej) posiada **energię potencjalną grawitacji $\mathbf{E}_p$**.

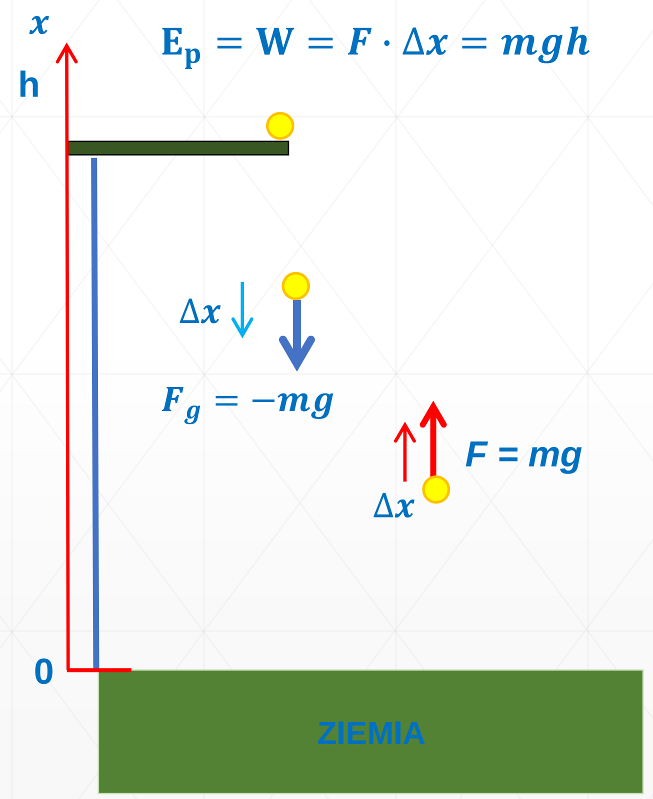
Energia ta jest równa pracy jaką wykona siła *F* przeciwna do siły grawitacji $F_g = -mg$ na drodze $\Delta x = h$ (aby wznieść ciało na wysokość *h*).

$$W = F \cdot \Delta x = mgh$$

$$W = \int_0^h F ds = \int_0^h mg ds = mg \int_0^h ds = mgh$$

Gdy ciało spada z wysokości *h* to praca jaką wykona siła grawitacji $F_g = -mg$ na drodze $\Delta x = -h$ jest równa zmianie jego energii potencjalnej.

$$W = F_g \cdot \Delta x = (-mg)(-h) = mgh$$



Energia potencjalna = Praca

Zatem ciało znajdujące się na wysokości *h* ma zapas energii równy *mgh*.

Moc

Szybkość z jaką siła wykonuje pracę, czyli pracę wykonywaną w jednostce czasu nazywamy mocą

$$P_{śr} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

moc chwilowa

jedn. 1 W = 1 J/s

Jeżeli siła nie zależy od czasu ($\vec{F} = const.$) to:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

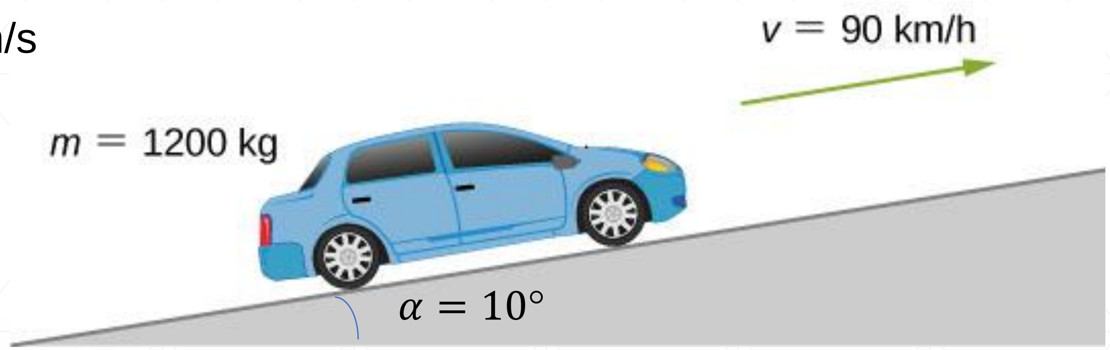
$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$

znając moc można wyznaczyć pracę

Przykład na wyznaczanie mocy

Jaka musi być minimalna moc silnika samochodu o masie 1200 kg, aby wjechać pod górę zbocza o kącie nachylenia 10° z prędkością 90 km/h? Przyjmij, że 25% mocy samochodu jest wykorzystywane do przeciwdziałania siłom oporu ruchu.
Dane:

v =90 km/h = 90000/3600 = 25 m/s



Przy stałej prędkości zmiana energii kinetycznej równa jest zero, w związku z tym cała wykonana praca jest wykorzystywana do przeciwdziałania sile grawitacji i siłom oporu ruchu. Wypadkowa siła nie zależy od czasu ($\vec{F} = const.$) to:

$$0{,}75P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad 0{,}75P = mg \cdot v \cdot sin10°$$

1KM=735,49875 W

$$P = \frac{1200\;kg \cdot 9{,}8\frac{m}{s^2} \cdot 25\frac{m}{s} \cdot 0{,}174}{0{,}75} = 68{,}2\;kW$$

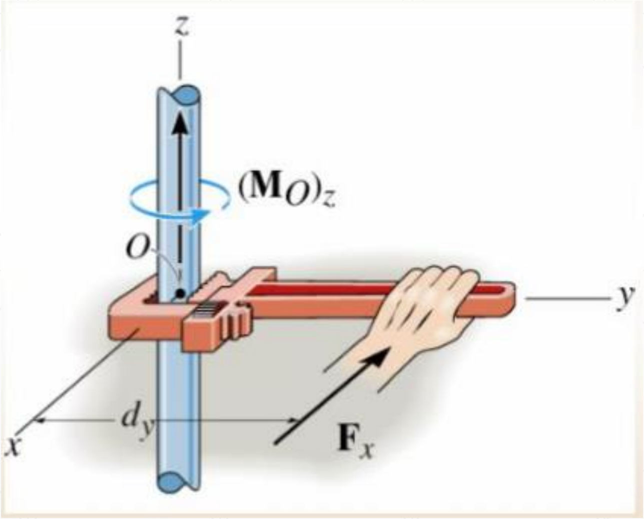
co odpowiada 93 KM

W rzeczywistość moc musi być większa do nie uwzględniliśmy strat energii w silniku.

Dynamika punktu materialnego w ruchu po okręgu

Ważną wielkością związaną z dynamiką ruchu obrotowego ciała sztywnego jest moment siły, nazywany też momentem obrotowym. Efekty jego działania można obserwować na co dzień w naszym najbliższym otoczeniu:

- Moment siły odczuwamy używając dużego klucza do wykręcenia trudnej do odkręcenia śruby.
- Moment działa w niewidoczny sposób, gdy naciskamy pedał gazu w samochodzie nadając silnikowi dodatkowy moment obrotowy.
- Za każdym razem, gdy spacerujemy, czy biegniemy, towarzyszy temu moment siły przyłożony do naszego ciała.

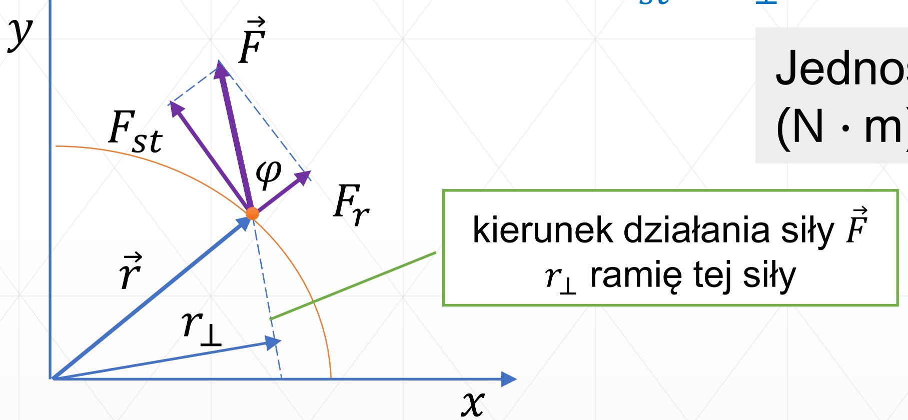


Teraz zajmiemy się dynamiką punktu materialnego po okręgu, a na następnych wykładach przejdziemy do omawiania ruchu obrotowego bryły sztywnej.

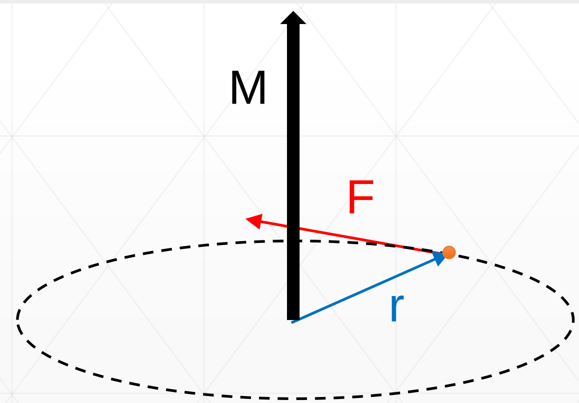
Moment siły

Moment siły ciała (punktu materialnego) o masie m poruszającego się po promieniu r to wielkość odpowiedzialna za obrót ciała wokół pewnej osi obrotu, gdy na to ciało działa siła $\vec{F}$. Jeżeli ta siła jest przyłożona w punkcie, którego położenie względem osi jest dane przez wektor położenia $\vec{r}$, to wartość momentu siły wynosi:

$$M = r \cdot F_{st} = r_{\perp} \cdot F = rFsin\varphi$$



Jednostką momentu siły jest niuton razy metr (N · m) ale nie należy jej z dżulem mylić z (J)

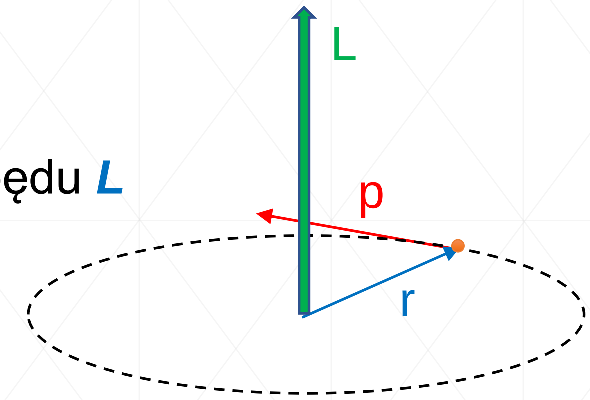


Moment siły $\vec{M}$ to iloczyn wektorowy (×) ramienia $\vec{r}$ na którym działa siła i tej siły $\vec{F}$: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Kierunek wektora $\vec{M}$ wyznaczamy z reguły prawej dłoni dla iloczynu wektorowego.

Jeżeli siła będzie skierowana wzdłuż promienia (albo do osi obrotu albo od osi obrotu) to na układ nie będzie działał moment siły!

Momentu pędu



Odpowiednikiem pędu w ruchu obrotowym jest moment pędu ***L***

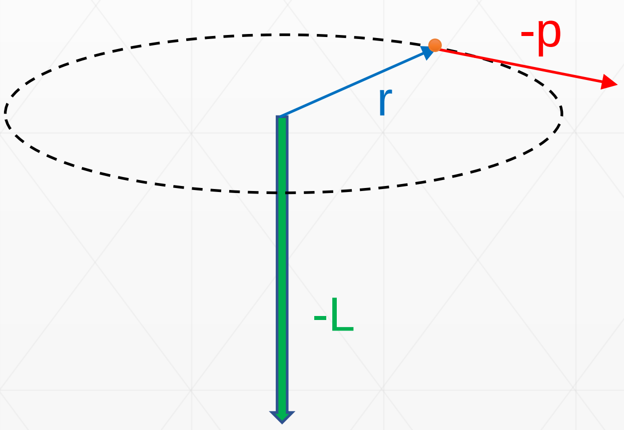
Moment pędu (***L***) to iloczyn wektorowy (×) ramienia (***r***) i pędu (***p***), który posiada ciało:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Jednostką momentu pędu jest (kg · m^2/s)

Moment pędu ciała o masie *m* poruszającego się z prędkością ***v*** po promieniu ***r*** jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny w której porusza się ciało i skierowany zgodnie ze zwrotem osi OZ (dodatni) gdy ciało obraca się w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara.

Zmiana pędu na przeciwny powoduje, że moment pędu staje się skierowany w przeciwna stronę – zgodnie z właściwościami iloczynu wektorowego



moment pędu (jak moment sił) ma znaczenie tylko wtedy, gdy wiadomo względem którego punktu jest wyznaczony

Druga zasada dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego

Obliczmy zmianę momentu pędu w czasie, czyli zróżniczkujmy stronami poniższe równanie:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{\mathrm{r}}\times\vec{\mathrm{v}})}{\mathrm{dt}} = m\left(\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\times\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{r}}\times\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}\right) = m(\vec{v}\times\vec{v} + \vec{\mathrm{r}}\times\vec{\mathrm{a}})$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{dt}} = m\,\underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{=0} + \vec{\mathrm{r}}\times m\vec{\mathrm{a}} = \vec{\mathrm{r}}\times\vec{\mathrm{F}} = \vec{M}$$

Suma (wektorowa) wszystkich momentów siły działającej na ciało jest równa szybkości zmiany moment pędu tego ciała (punktu materialnego)

$$\vec{M}_{wyp} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{L}}}{\mathrm{dt}}$$

analogia do ruchu postępowego

$$\vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Należy pamiętać, że moment pędu układu cząstek jest równy sumie momentów pędu poszczególnych cząstek układu.

Praca i energia kinetyczna w ruchu obrotowym

Wzory, z których można obliczyć pracę i moc w ruchu obrotowym, są analogiczne do odpowiednich równań dla ruchu postępowego:

$$W = \int_0^s F ds$$

$$W = \int_0^\theta M d\theta = E_{k koń} - E_{k\ pocz}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

przy stałej sile

przy stałym momencie sił

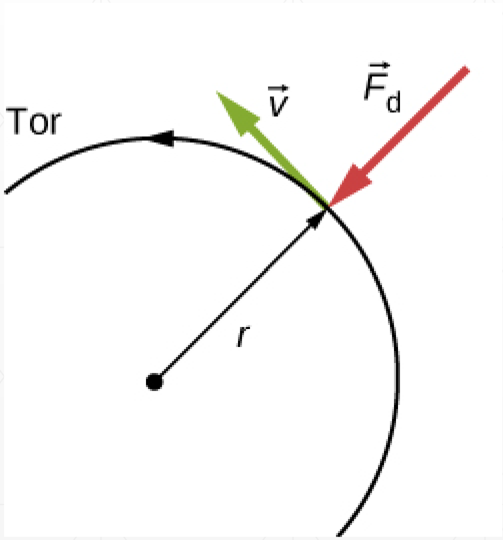
Siła dośrodkowa

Analizując ruch jednostajny po okręgu wykazaliśmy, że zmiana kierunku ruchu związana jest z przyspieszeniem skierowanym do środka okręgu, zwanym przyspieszeniem dośrodkowym, wyrażonym wzorem:

$$a_n = v^2/r \qquad \text{lub} \qquad a_n = \omega^2 \mathrm{r}$$

Przyspieszenie to wywołuje siła, tak samo skierowana, równa zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona iloczynowi masy i przyspieszenia $F_d = m\, a_n$
Przykładami takich sił mogą być:

- siła naciągu liny wahadła,
- siła grawitacji wywierana przez Ziemię na Księżyc,
- tarcie między łyżworolkami a podłożem,
- siła wywierana na samochód na zakręcie,
- siła wywierana na obiekty w wirowce.



Siła dośrodkowa $\overrightarrow{F_d}$ jest zawsze prostopadła do toru i skierowana jest do środka jego krzywizny,

Samochód na zakręcie

Oblicz siłę dośrodkową wywieraną na auto o masie 900 kg, które pokonuje zakręt o promieniu krzywizny 500 m z prędkością 25 m/s.

$$F_d = \frac{mv^2}{r} = \frac{900 \cdot 25^2}{500} = 1125\ N$$

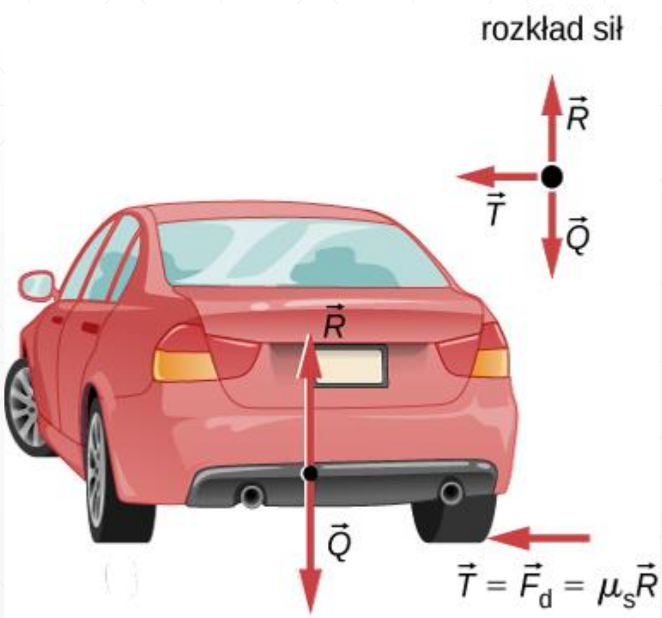
Zakładając, że zakręt jest płaski, oblicz minimalny współczynnik tarcia statycznego pomiędzy oponami i drogą, aby auto nie wpadło w poślizg.

Siła tarcia $\vec{T}$ skierowana w lewo chroni auto przed poślizgiem, działa w płaszczyźnie poziomej – spełnia więc rolę siły dośrodkowej $\overrightarrow{F_d}$.

$$F_d = T = fR = fmg$$

$$\frac{mv^2}{r} = fmg \qquad \text{stąd} \qquad f = \frac{v^2}{rg}$$

$$f = \frac{25^2}{500 \cdot 9{,}8} = 0{,}13$$



Podsumowanie

- **praca** – działanie siły na drodze s,
- **moc** – praca wykonywana w jednostce czasu,
- **energia kinetyczna** – praca wykonana przy rozpędzeniu ciała, $E_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}$
- **energia potencjalna** – praca wykonana przez siłę grawitacji przy podnoszeniu ciała, $E_p = mgh$
- **zasady dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego** – moment siły, moment pędu,
- **siła dośrodkowa** – jako sprawca zmiany kierunku ruchu.