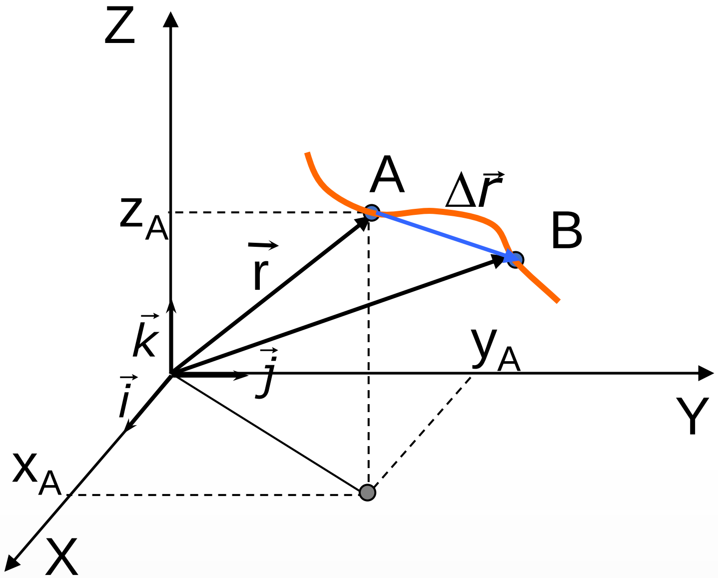
4. Ruch krzywoliniowy

- opis ruchu 3D,
- parametryczne równanie toru ruchu,
- położenie, prędkość i przemieszczenie,
- przyspieszenie styczne i normalne do toru ruchu,
- rzut poziomy i ukośny,
- wielkości opisujące ruch po okręgu.

Ruch w trzech wymiarach



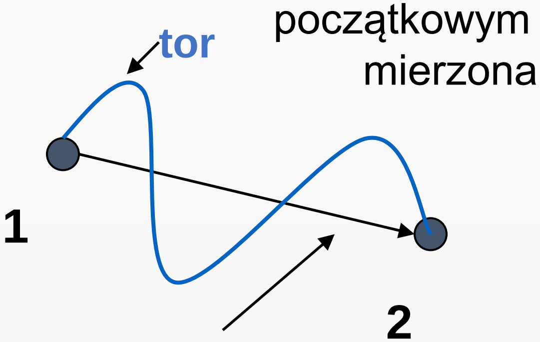
- położenie cząstki – podanie współrzędnych cząstki (**wektor położenia**)

$$\vec{r} = (x, y, z) = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{r}_A = (2, 3, 2.5) \quad \vec{r}_B = (1, 4, 2)$$

- **ruch** – zmiana położenia względem układu odniesienia

droga s – odległość pomiędzy położeniem początkowym i końcowym mierzona wzdłuż toru

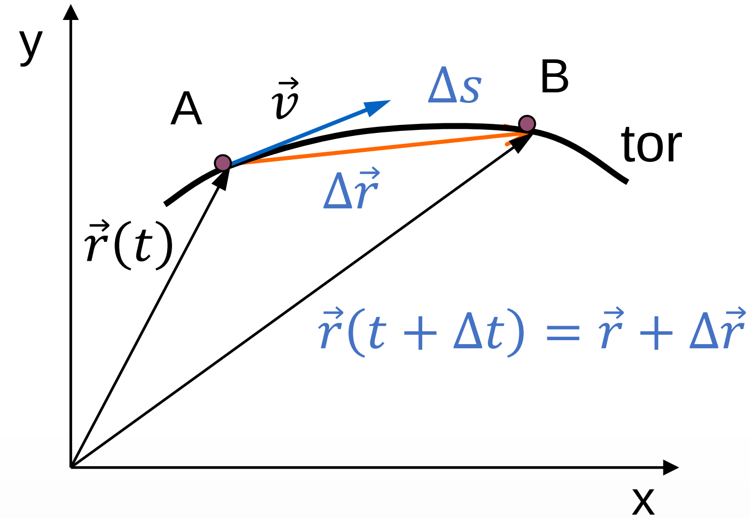


- **tor** (trajektoria) cząstki – linia którą zakreśla poruszająca się cząstka
- **przemieszczenie** $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$$\Delta\vec{r} = (1-2,\ 4-3,\ 2-2.5) = (-1, 1, -0.5))$$

Prędkość

cząstka porusza się po krzywoliniowym torze z punktu A do B w czasie Δt przebywając drogę Δs



- prędkość średnia

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- prędkość chwilowa

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad \vec{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

- wartość liczbowa prędkości chwilowej jest równa długości wektora $\vec{v}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

lub pochodnej drogi względem czasu

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

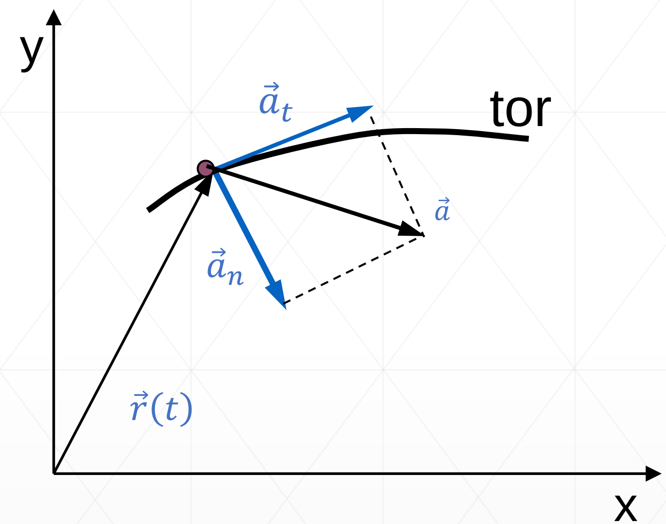
- wektor prędkości jest styczny do toru ruchu $\vec{v} = v\vec{i}_t$, $\vec{i}_t$ wektor jednostkowy

Przyspieszenie styczne i normalne

Określmy jakim zmianom w czasie podlega wektor prędkości $\vec{v}$

$$\vec{v} = v\vec{i}_t \qquad \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{i}_t) = \frac{dv}{dt}\vec{i}_t + \frac{d\vec{i}_t}{dt}v$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$



$$a_t = \frac{dv}{dt}$$ przyspieszenie styczne
szybkość zmiany wartości v

$$a_n = \frac{di_t}{dt}v = \frac{v^2}{R}$$ przyspieszenie normalne
szybkość zmiany kierunku ruchu
(R – promień krzywizny)

Przykład: $\vec{r} = (3t^2, 4t^2)$ $\quad \vec{v} = (6t,\ 8t)$ $\quad \vec{a} = (6,\ 8)$

$$v = 2\sqrt{9t^2 + 16t^2} = 10\mathrm{t} \qquad a_t = \frac{dv}{dt} = 10 \qquad a = 2\sqrt{9+16} = 10$$

Co to oznacza, że $a_t = a$?

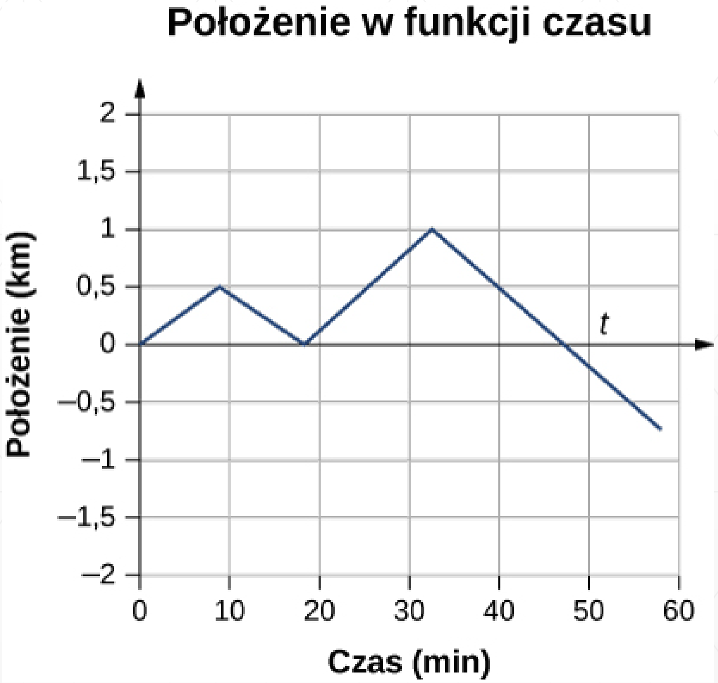
Ruch w dwóch wymiarach

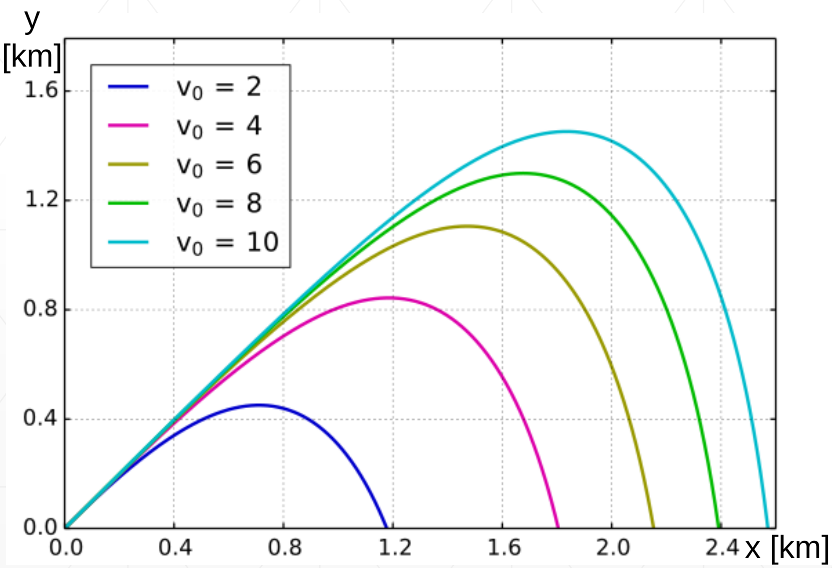
Zaznaczając, że wektor położenia punktu zmienia się w czasie

$$\overrightarrow{r(t)} = x(t) \cdot \vec{\imath} + y(t) \cdot \vec{\jmath}$$

to $x(t)$, $y(t)$, są **kinematycznymi równaniami ruchu.**

Eliminując z tych równań czas otrzymamy **równanie toru.**





Krzywe balistyczne przy takim samym kącie wystrzału i masie, lecz różnych prędkościach początkowych.

Tor ruchu ciała – miejsce geometryczne kolejnych położeń ciała.

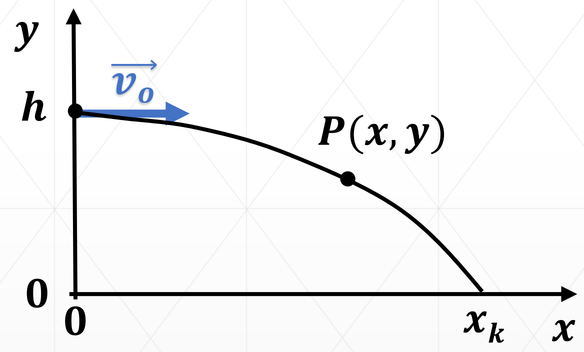
Rzut poziomy

Rzutem poziomym nazywamy ruchu ciała rzuconego z określonej wysokości h w kierunku poziomym z prędkością v_o.

Rzut poziomy jest ruchem złożonym z dwóch ruchów prostoliniowych: jednostajnego w kierunku poziomym z prędkością początkową v_o oraz jednostajnie przyspieszonego z prędkością początkowa $v_o = 0$ i przyspieszeniem ziemskim g zwróconym ku środkowi kuli ziemskiej (przeciwnie do kierunku osi OY).

ruch poziomy: $\boldsymbol{x = v_o \cdot t}$, $\boldsymbol{v_x = v_o}$

ruch pionowy: $\boldsymbol{y = h - g\frac{t^2}{2}}$, $\boldsymbol{v_y = -g \cdot t}$



Czas t_0 po którym ciało upadnie na ziemię wyznaczymy z warunku $y = 0$, a miejsce upadku ciała z równania $x_k = v_o \cdot t_0$

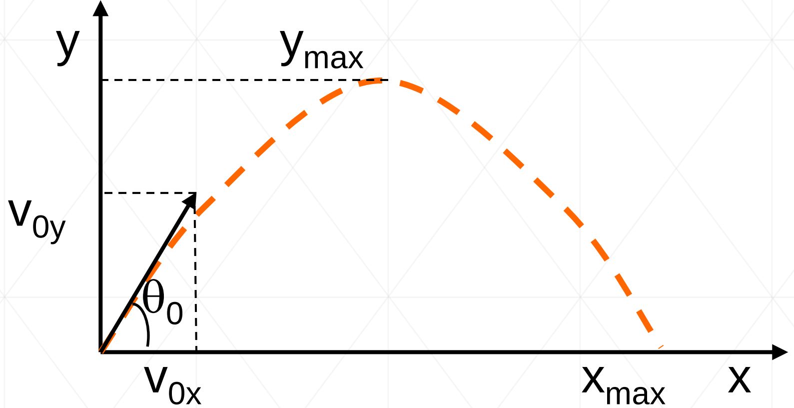
$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad x_k = v_o\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Równanie toru ruchu $y = h - \frac{g}{v_0^2}x^2$

przedstawia parabolę

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \vec{r}_0 = (0, h) \qquad \vec{v}_0 = (v_0, 0) \qquad \vec{a} = (0, -g)$$

Rzut ukośny



ruch z prędkością początkową v_0 i z przyspieszeniem ziemskim g

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

wektor prędkości początkowej możemy przedstawić w postaci sumy jego składowych w kierunku poziomym x i pionowym y

$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$ gdzie $v_{0x}=v_0\cos\theta_0$ $v_{0y}=v_0\sin\theta_0$

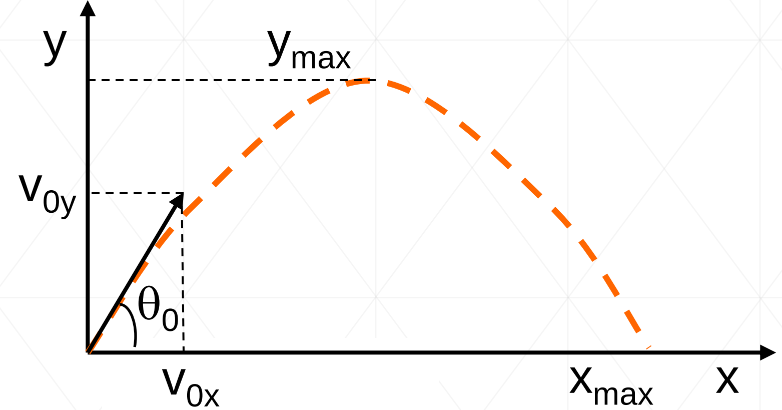
w rzucie ukośnym ruch cząstki w kierunku poziomym i kierunku pionowym można traktować jako niezależne, ale zachodzący w tym samym czasie – żaden z nich nie wpływa na drugi

ruch w poziomie: $v_{0x} = const.$ $x = x_0 + v_{0x}t$ $x_0=0$

ruch w pionie: $a = -g$ $y = y_0 + v_{0y}t - gt^2/2$ $y_0=0$

$t = \dfrac{x}{v_{0x}}$ $y = v_{0y}\dfrac{x}{v_{0x}} - g\dfrac{x^2}{2v_{0x}^2}$ jest to równanie toru ruchu - parabola

Rzut ukośny



równanie toru: $$y = (tg\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}$$ równanie paraboli

prędkość w ruch w poziomie: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$

prędkość w ruchu w pionie: $v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt$

maksymalna wysokość: y_{max} gdy $v_y = 0$ czyli $0 = v_0 \sin\theta_0 - gt_w$ $\longrightarrow$ $$t_w = \frac{v_0\sin\theta_0}{g}$$

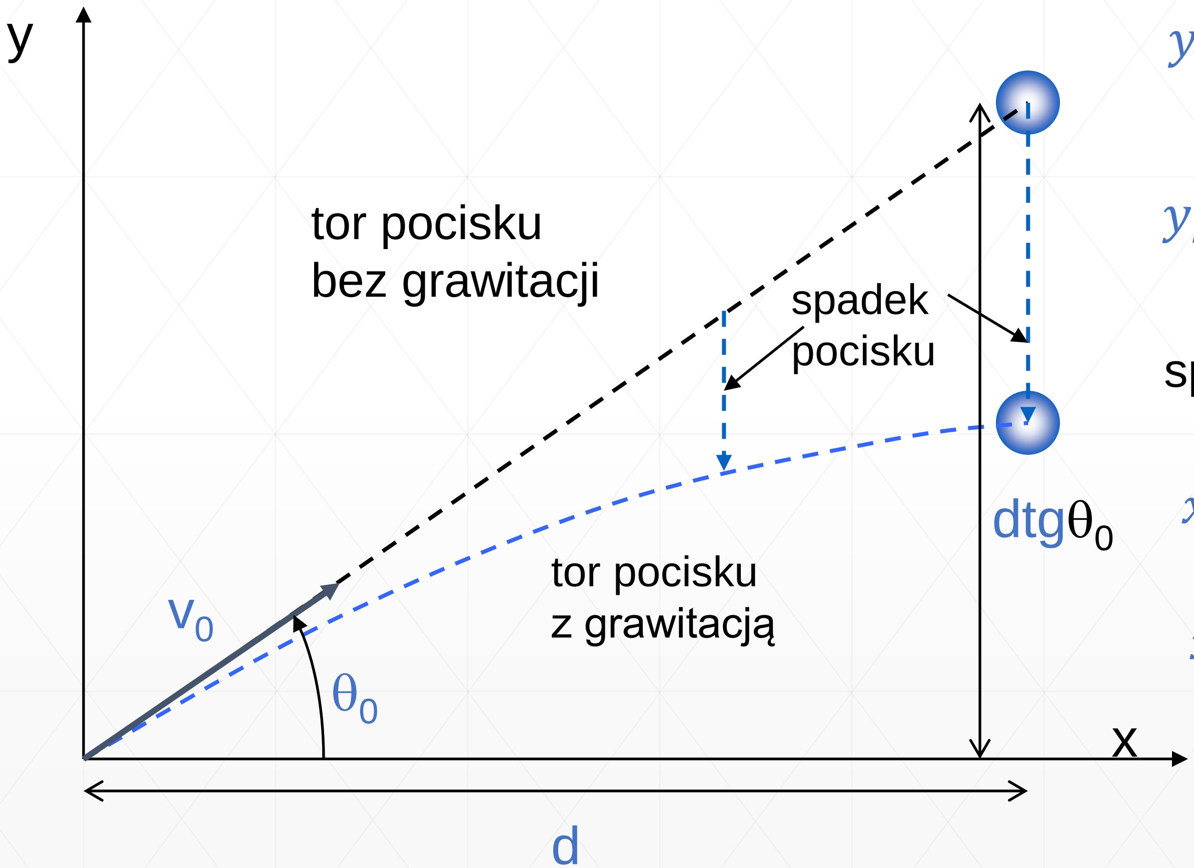
$$y_{max} = y(t_w) = v_0\sin\theta_0 t_w - g\frac{t_w^2}{2} = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{g} - \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2g}$$

ponieważ $t_w = t_s$ to $t_c = 2t_w$

zasięg rzutu: $$x_{max} = x(t_c) = v_0\cos\theta_0\frac{2v_0\sin\theta_0}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0$$

Strzelec i małpa

Strzelec celuje do kokosu który trzyma małpa siedząca na drzewie.
W momencie wystrzału małpa upuszcza kokos. Czy trafi do celu?



$$y_{poc} = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y_{koko} = d \cdot tg\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

spotkanie gdy $x_{poc}=x_{koko}$

$$x_{poc} = (v_0 \cos\theta_0)t$$

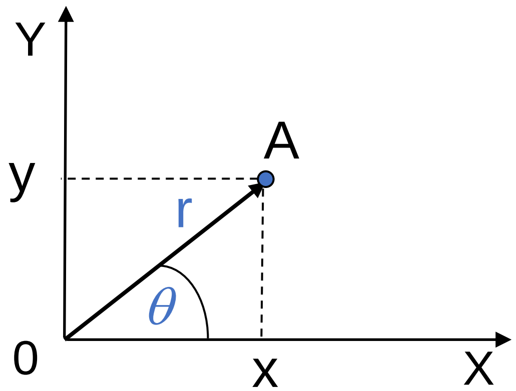
$$x_{koko} = d \qquad t = \frac{d}{v_0\cos\theta_0}$$

ponieważ

$$(v_0 \sin\theta_0)t = (v_0\sin\theta_0)\frac{d}{v_0\cos\theta_0} = d\cdot tg\theta_0$$

więc $y_{poc}=y_{koko}$ Pocisk zawsze trafi w kokos

Układ biegunowy



- w przypadku analizy ruchu po okręgu wygodniej stosować układ biegunowy poprzez podanie:
  - odległości od środka układu **r**
  - kąta azymutalnego θ w płaszczyźnie XY

związek pomiędzy współrzędnymi układu kartezjańskiego i biegunowego

$$\vec{r} = (r, \theta) \qquad \vec{r}_A = (3, \frac{\pi}{4})$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

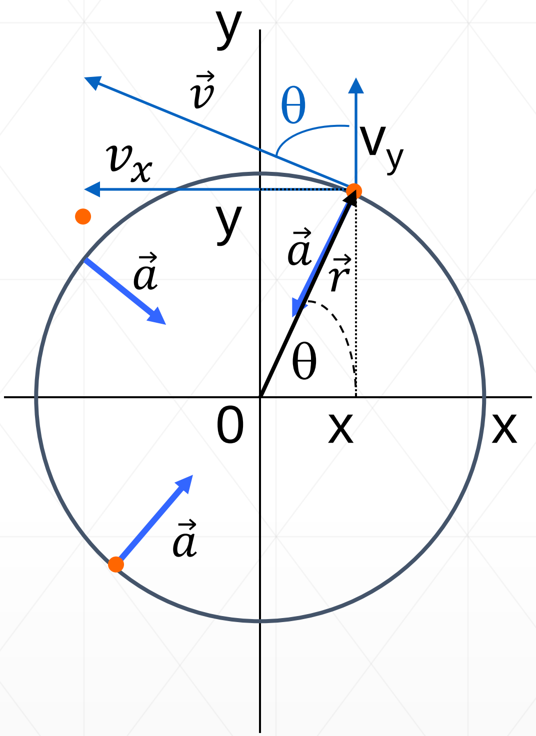
$$x = 3\cos 45° = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}12$$

$$y = 3\sin 45° = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}12$$

$$\vec{r} = (2{,}12, 2{,}12)$$

Ruch jednostajny po okręgu

promień jest stały r = const., wartość prędkości nie zmienia się i jest ona styczna do toru (okręgu)



$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = r(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})\\ \vec{v} &= v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} = (-v\sin\theta)\vec{\imath} + (v\cos\theta)\vec{\jmath}\end{aligned}\right\}$$

składowe wyznaczone z rysunku

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta &= x/r\\ \sin\theta &= y/r\end{aligned}\right\} \qquad \vec{v} = \left(-v\frac{y}{r}\right)\vec{\imath} + \left(v\frac{x}{r}\right)\vec{\jmath}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy}{dt}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx}{dt}\right)\vec{\jmath} = \left(-\frac{v}{r}v_y\right)\vec{\imath} + \left(\frac{v}{r}v_x\right)\vec{\jmath}$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\vec{\imath} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\vec{\jmath} = -\frac{v^2}{r}(\cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath})$$

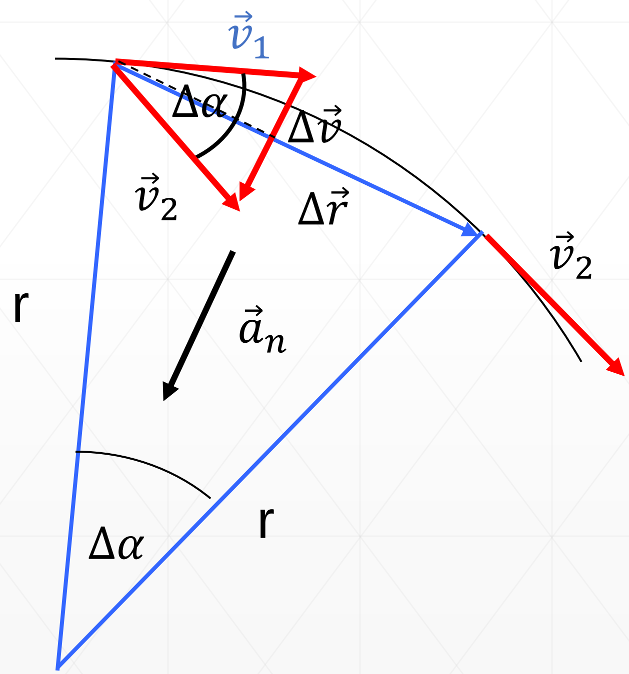
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r} \qquad a_n = \frac{v^2}{r}$$

W ruchu jednostajnym po okręgu działa przyspieszenie normalne (dośrodkowe) – bo jest prostopadłe do toru i skierowane do środka okręgu.

Składowa normalna przyspieszenia

Składowa normalna przyspieszenia jest odpowiedzialna za zmianę kierunku wektora $\vec{v}$

Ruch jednostajny więc: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$



$$\Delta v = 2v\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx v\Delta\alpha$$

Z podobieństwa trójkątów niebieskiego i czerwonego

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r}$$

$$a = a_n = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r}v$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

i skierowane jest zgodnie z kierunkiem wektora $\Delta\vec{v}$ czyli do środka okręgu

$$\vec{a}_n || \Delta\vec{v}$$

Przyspieszenie dośrodkowe

Typowe wartości przyspieszenia dośrodkowego

Obiekt	**Przyspieszenie dośrodkowe (m/s^2)**
Ziemia krążąca wokół Słońca	$5{,}93 \cdot 10^{-3}$
Księżyc krążący wokół Ziemi	$2{,}73 \cdot 10^{-3}$
Satelita na orbicie geostacjonarnej	0,233
Zewnętrzna krawędź płyty CD	5,78
Odrzutowiec wykonujący „beczkę”	20 – 30 ~(2g – 3g)
Kolejka górska (roller coaster)	50 ~5g
Elektron w atomie wodoru wg. Bohra	$9{,}0 \cdot 10^{22}$

Przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81\ m/s^2$

Zmienne opisujące ruch obrotowy

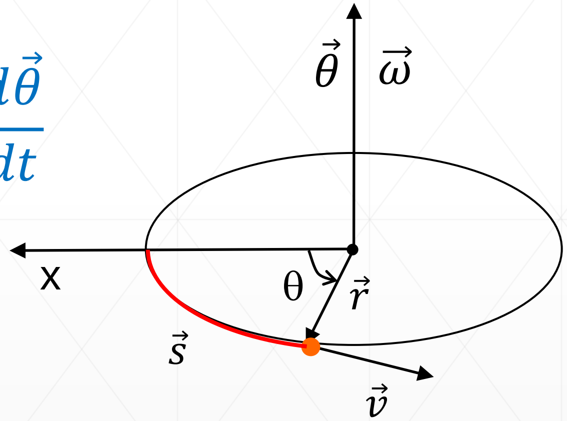
Jednostajny ruch obrotowy po okręgu o promieniu *r* w układzie biegunowym:

θ – **położenie kątowe** – kąt jaki zakreślił wektor położenia cząstki względem osi OX

s – długość łuku zakreślonego przez cząstkę $s = \theta \cdot r$

Kątowi θ można przypisać wektor $\vec{\theta}$ prostopadły do płaszczyzny xy, w której leżą wektor położenia $\vec{r}$ i wektor długości łuku $\vec{s}$. Te trzy wektory związane są relacją:

$$\vec{s} = \vec{\theta} \times \vec{r}$$



ω - **prędkość kątowa** to szybkość zmiany kąta $\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt}$

i wektor $\vec{\omega}$ posiada ten sam kierunek co wektor $\vec{\theta}$

Jednostką prędkości kątowej jest [rad/s].

Ponieważ

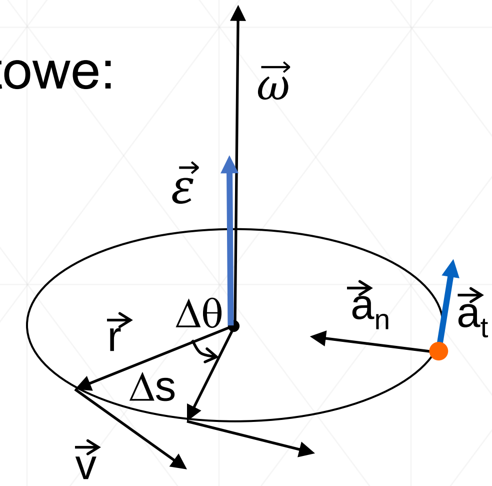
$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\left(\vec{\theta} \times \vec{r}\right)}{dt} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r}$$

więc $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ a wartości tych wektorów wiąże relacja $v = \omega \cdot r$

Jeżeli cząstka obracałaby się zgodnie z ruchem wskazówek zegara to wektory $\vec{\theta}$ i $\vec{\omega}$ byłyby skierowane do dołu.

Przyspieszenie kątowe

Jeżeli ruch obrotowy nie będzie jednostajny, to zmiana prędkości kątowej określa chwilowe przyspieszenie kątowe:



ε - przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

Korzystając z definicji przyspieszenia liniowego:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\cdot\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{r})}_{=0} - \vec{r}\cdot(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) = -\omega^2\vec{r}$$

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ tożsamość

otrzymujemy

$$\vec{a}_n = -\omega^2\cdot\vec{r} = -\frac{v^2}{r^2}\vec{r} = -\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$

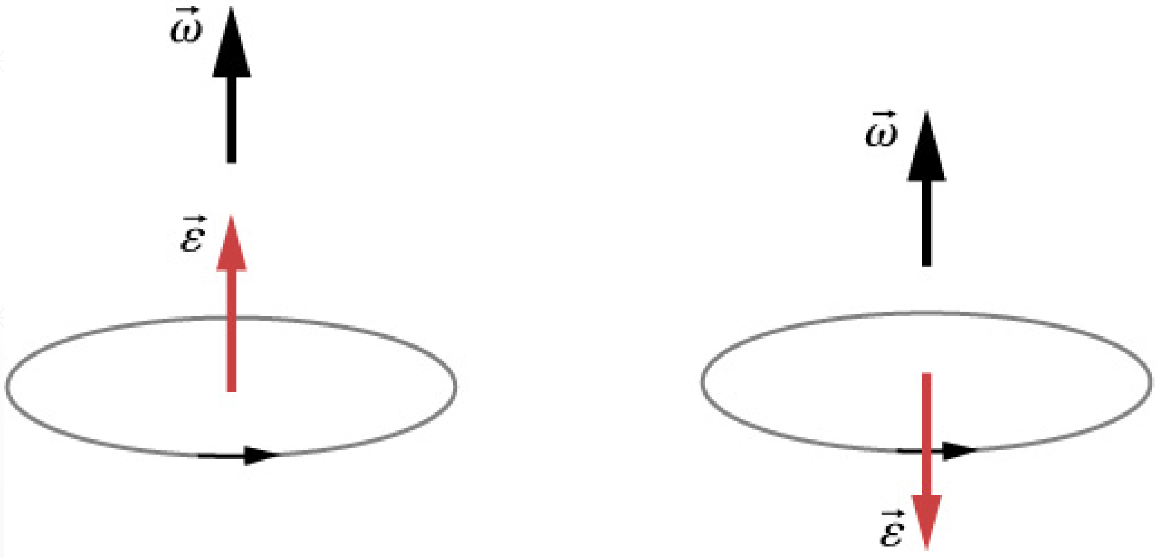
$$\vec{a} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} - \omega^2\cdot\vec{r} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Przyspieszenie styczne i normalne (dośrodkowe)

czyli przyspieszenie kątowe określa przyspieszenie styczne

Prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe

Wektor przyspieszenia kątowego jest, podobnie jak $\vec{\theta}$ i $\vec{\omega}$, również prostopadły do płaszczyzny xy po której porusza się cząstka, a jego zwrot zależy od kierunku zmian prędkości kątowej.



(a) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa rośnie

(b) Obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, prędkość kątowa maleje

W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

W przypadku (a) ruch jest przyspieszony, w przypadku (b) opóźniony.

Przykład – wirujące koło rowerowe

Mechanik rowerowy umieszcza rower w stojaku do napraw rowerów i zaczyna obracać tylne koło. W czasie 5 s od początku ruchu osiąga ono prędkość kątową wynoszącą 250 obrotów na minutę. Wyznacz w rad/s^2 średnie przyspieszenie kątowe. Po jakim czasie koło się zatrzyma, jeżeli mechanik wciśnie hamulec, wytwarzając przyspieszenie kątowe równe -87,3 rad/s^2?

Rozwiązanie: Średnia wartość przyspieszenia kątowego:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{250\ obr/min}{5\ s} = \frac{26{,}2\ rad/s}{5\ s} = 5{,}24\ rad/s^2$$

$$\text{bo } \Delta\omega = 250\frac{obr}{min} \cdot 2\pi\frac{rad}{obr} \cdot \frac{1\ min}{60\ s} = 26{,}2\ rad/s$$

Prędkość kątowa maleje od wartości $26{,}2\ rad/s$ do zera czyli $\Delta\omega = -26{,}2\ rad/s$.

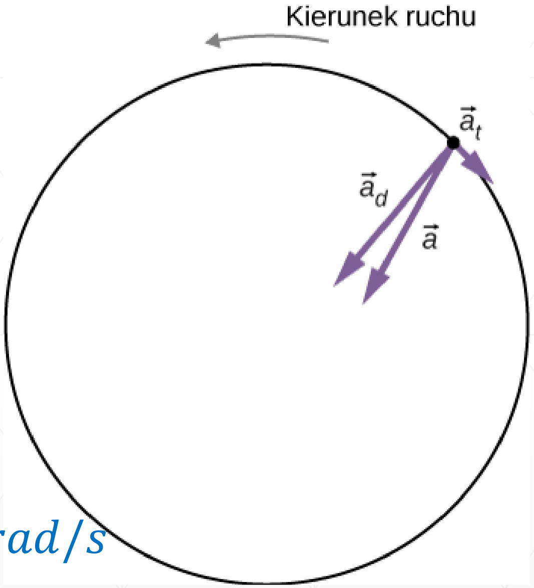
$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\langle \varepsilon \rangle} = \frac{-26{,}2\ rad/s}{-87{,}3\ rad/s} = 0{,}3\ s$$

Przy rozpędzaniu koła przyspieszenie jest małe i trzeba 5 sekund na rozpędzenie koła, przy hamowaniu przyspieszenie jest większe i prędkość kątowa szybciej maleje do zera.

Przykład – wirówka

Wirówka o promieniu 20 cm obracająca się w lewo zwalnia ze stałym przyspieszeniem kątowym od maksymalnej prędkości obrotowej wynoszącej 10 000 obr/min i zatrzymuje się po czasie 30 s. Jaka jest wartość i kierunek całkowitego przyspieszenia liniowego punktu położonego na obrzeżu wirówki w chwili t=29 s?

Rozwiązanie: Przyspieszenie kątowe:



$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 10^4 \cdot \frac{2\pi}{60} rad/s}{30\ s} = -34{,}9\ rad/s^2$$

$$a_t = r \cdot \varepsilon = 0{,}2m \cdot \left(-34{,}9 \frac{rad}{s^2}\right) = -7\ m/s^2$$

Prędkość kątowa w chwili t = 29 s

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t = 10^4 \cdot \frac{2\pi\ rad}{60\ s} + \left(-34{,}9 \frac{rad}{s^2}\right) \cdot 29\ s = 35{,}1\ rad/s$$

$$v_t = r \cdot \omega = 0{,}2m \cdot 35{,}1\ rad/s = 7\ m/s$$

$$a_d = \frac{v_s^2}{r} = \frac{(7 \frac{m}{s})^2}{0{,}2\ m} = 245 \frac{m}{s^2}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_d^2} = \sqrt{7^2 + 245^2} = 245{,}1 \frac{m}{s^2}$$

Wartość przyspieszenia stycznego jest znacznie mniejsza od dośrodkowego

W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

Przemieszczenie kątowe

Wyznaczmy zależność przemieszczenia kątowego $\Delta\theta$ w zależności od wartości przyspieszenia kątowego ε i zmiany prędkości kątowych ω w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

$$\Delta\theta = \theta - \theta_0 \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Czas wyznaczamy z wyrażenia na prędkość kątową $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \omega_0 \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon}\right)^2$$

$$\Delta\theta = \frac{2\omega_0\omega - 2\omega_0^2}{2\varepsilon} + \frac{\omega^2 - 2\omega\omega_0 + \omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$$

stąd związek prędkości kątowej z drogą kątową i przyspieszeniem kątowym:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\Delta\theta\varepsilon$$

Kinematyka ruchu obrotowego

Opis ruchu **obrotowego jednostajnie przyspieszonego** jest podobny do opisu ruchu postępowego tylko wielkości liniowe zastępujemy kątowymi:

Wielkość	**Ruch postępowy**	**Ruch obrotowy**
położenie ciała	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$
prędkość chwilowa	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
przemieszczenie	$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$	$\Delta\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}$

Równania kinetyczne dla ruchu postępowego i obrotowego

Podsumowanie

- **ruch mechaniczny** – zmiana położenia ciała w przestrzeni i czasie
- **w ruchu krzywoliniowym** występuje przyspieszenie styczne i normalne
- **rzuty**: poziomy i ukośny
- **ruch po okręgu** – opis w układzie kartezjańskim i biegunowym
- porównanie wielkości opisujących ruch postępowy i obrotowy

Wielkość	Ruch postępowy	Ruch obrotowy
położenie ciała	$\vec{r} = (x, y, z)$	$\vec{r} = (r, \theta)$
prędkość chwilowa	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
przyspieszenie	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
przyspieszenie styczne i normalne	$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \cdot \vec{r}$	