

# 3. Kinematyka punktu materialnego

---

- pojęcie ruchu ciała,
- ruch prostoliniowy jednostajny,
- prędkość punktu materialnego,
- ruch prostoliniowy jednostajnie zmienny,
- prędkość średnia, prędkość chwilowa,
- przyspieszenie punktu materialnego,
- swobodny spadek i rzut pionowy.



# Podstawowe pojęcia

**Kinematyka** – dział mechaniki, zajmujący się ruchem ciał, bez uwzględniania ich masy oraz rozpatrywania przyczyn wywołujących ruch ciała.

Podstawowe zadanie kinematyki: znalezienie **kinematycznego równania ruchu**, czyli **zależności współrzędnych ciała od czasu**, a także parametrów ruchu ciała: **przebytej drogi, prędkości, przyspieszenia i położenia** w danej chwili czasu.

**Ciało** – obiekt materialny, czyli obiekt obdarzony masą.

**Modele ciała** – możliwość pominięcia pewnych rodzajów ruchu, np. ruchu obrotowego lub drgającego:

- **Punkt materialny** – punkt matematyczny, w którym skupiona jest pewna masa – np. samolot na ekranie radaru.
- **Bryła sztywna** – ciało o pewnej masie zajmujące pewną stałą objętość i kształt – np. samolot na lotnisku.
- **Bryła elastyczna** – np. samolot w locie.

# Ruch mechaniczny

- **ruch mechaniczny** – zmiana położenia ciała  $\Rightarrow$  konieczne wskazanie innych ciał **względem**, których ruch się odbywa (względne przemieszczanie się ciał)

## Ruch – zmiana położenia w przestrzeni i w czasie

- **układ odniesienia** – zbiór nieruchomych względem siebie ciał służący do rozpatrywania ruchu innych ciał i zegar odmierzający czas
  - Ruch tego samego ciała względem różnych układów odniesienia  $\Rightarrow$  różny charakter (pasażer w pociągu)
- **opis ruchu** – podanie położenia dla każdej chwili czasu
- **punkt materialny** – ciało o znikomo małych rozmiarach w warunkach danego zagadnienia, o danej masie i położeniu, które można określić jak położenie punktu geometrycznego

# Względność ruchu

Ruch jest **zjawiskiem względnym** i może być rozpatrywany **jedynie** względem innego ciała lub układu ciał.

**Układ odniesienia** – układ współrzędnych dowiązany do pewnego ciała lub układu ciał, zaopatrzonego dodatkowo w **zegar** do pomiaru czasu.

Wybór układu odniesienia **należy do nas** i powinien upraszczać rozwiązanie zagadnienia.

Położenie rowerzystek można podać względem:

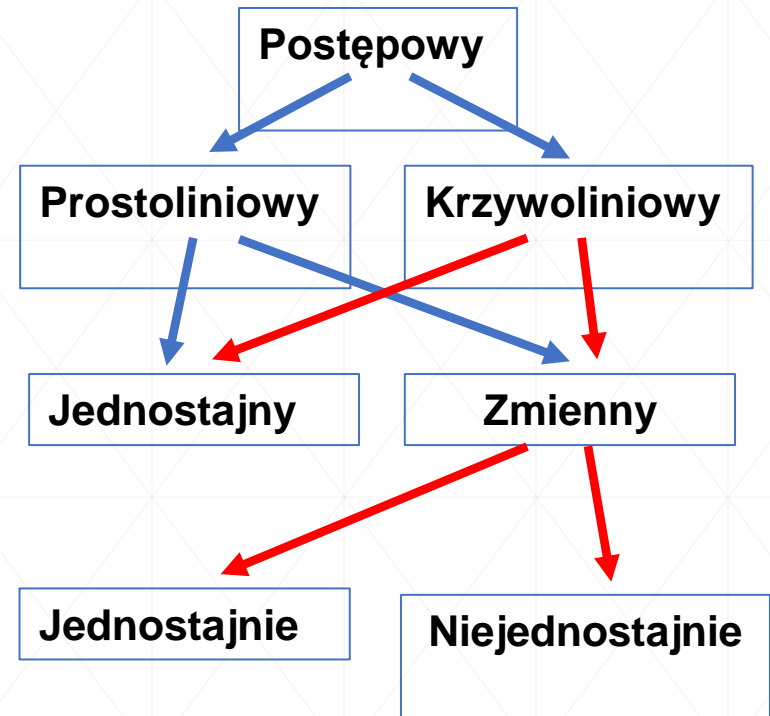
- ulicy, budynków,
- samochodów czy
- względem siebie nawzajem.

Ich ruch można opisać poprzez położenie oraz przemieszczenie w wybranym układzie odniesienia.



# Klasyfikacja ruchów

- rodzaj:
  - postępowe
  - obrotowe
- tor:
  - prostoliniowe
  - krzywoliniowe (po okręgu, rzut poziomy, ukośny)
  - przestrzenne i płaskie
- wartość prędkości:
  - jednostajne  $v = \text{const.}$
  - jednostajnie zmienne  $v \neq \text{const.}$
  - niejednostajne  $v \neq \text{const.}$



$$v = \text{const.}$$

$$a = 0$$

$$v \neq \text{const.}$$

$$a = \text{const.}$$

$$v \neq \text{const.}$$

$$a \neq \text{const.}$$

# Ruch prostoliniowy

- ruch zachodzący tylko wzdłuż linii prostej np. osi OX
- położenie ciała, czyli współrzędną punktu w jakim się ono znajduje, wyznaczamy względem punktu odniesienia (początku osi) podając współrzędną punktu

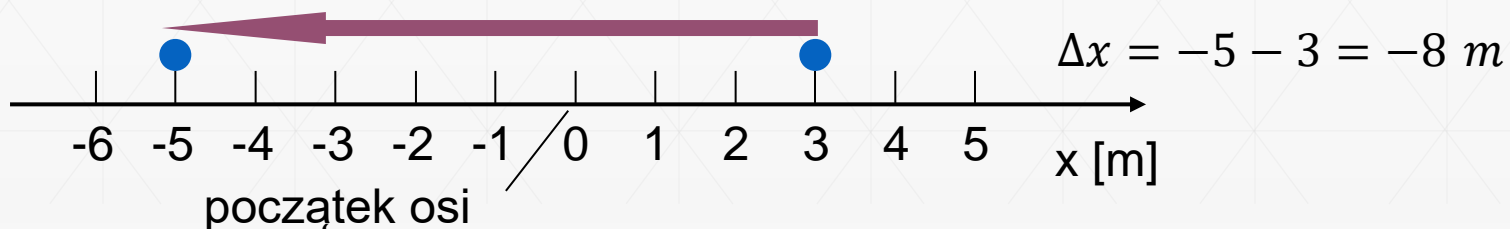
$$x_1 = 3m, \quad x_2 = -5m$$

- przemieszczenie, zmiana położenia punktu materialnego – od położenia końcowego odejmujemy początkowe

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Grecka duża litera  $\Delta$  (delta) określa zmianę danej wielkości

- znak przemieszczenia określa kierunek ruchu
  - znak dodatni oznacza ruch zgodnie z kierunkiem osi OX
  - znak ujemny oznacza ruch przeciwny do kierunku osi OX



# Prędkość średnia

- Jak szybko porusza się cząstka? Niech w chwili czasu  $t_1$  znajduje się w położeniu  $x_1$ , a w chwili  $t_2$  w położeniu  $x_2$ .
- prędkość średnia **jednostka (m/s)**

$$v_{\text{śr}} = \bar{v} = \langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{przemieszczenie}}{\Delta t}$$

wielkość wektorowa – kierunek ruchu wskazuje znak +/-

- średnia szybkość (prędkość podróżna)

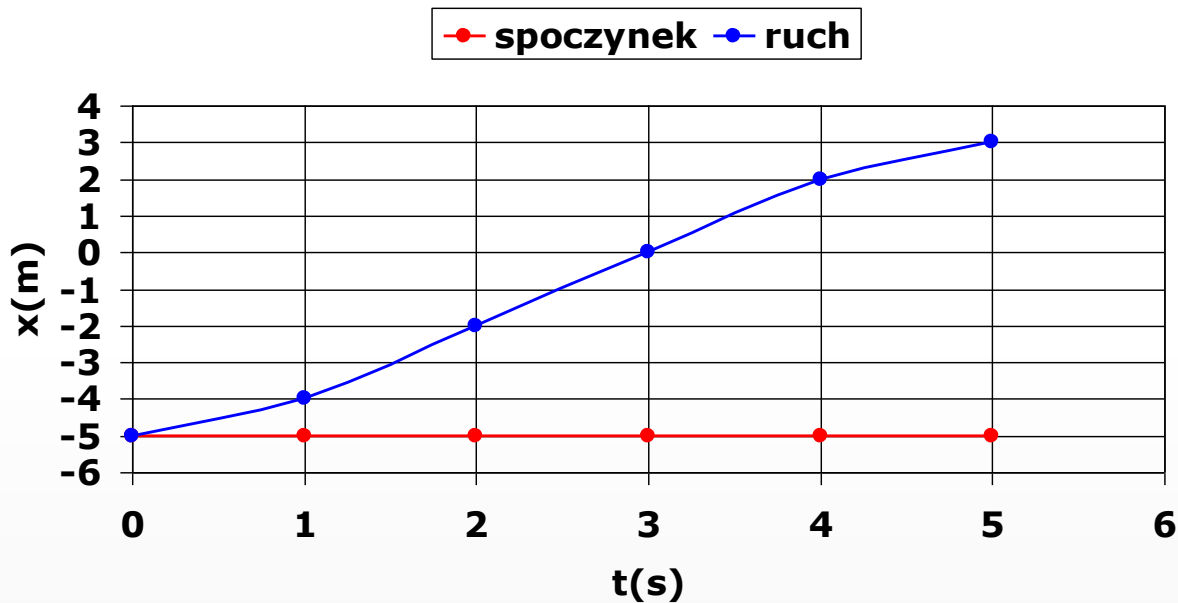
$$SZ_{\text{śr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{całkowita droga}}{\Delta t}$$

wielkość ta nie uwzględnia kierunku ruchu (ma znaczenie średniej wartości bezwzględnej prędkości) jest wygodną miarą zmiany drogi w czasie, używają jej kierowcy, żeby określić czas, po którym dotrą do wyznaczonego celu od momentu rozpoczęcia podróży

- jeżeli prędkość jest w trakcie ruchu zawsze taka sama to ruch nazywamy ruchem jednostajnym ( $v = \text{const}$ ), a prędkość średnią nazywamy prędkością stałą
- a co będzie jak prędkość ciała będzie się w czasie ruchu zmieniała?



# Sposób przedstawiania ruchu – wykres $x(t)$



$$x = f(t)$$

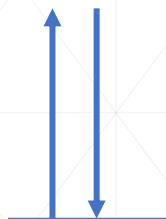
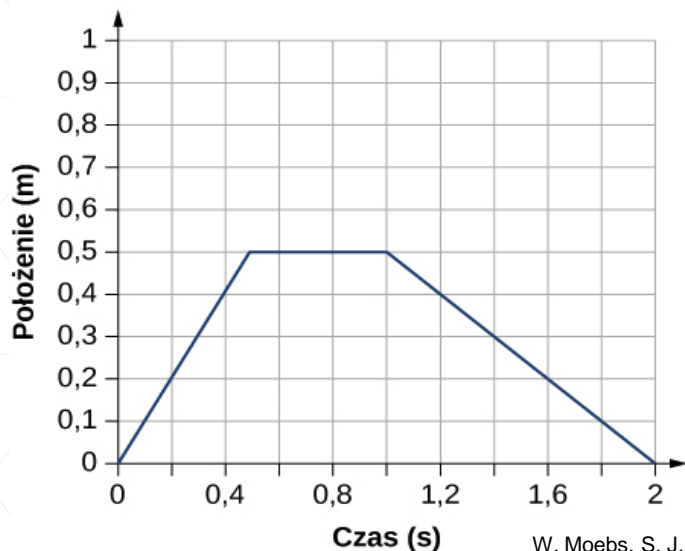
$$\underline{x = -5}$$

$$\underline{x = -0,1 \cdot t^3 + 0,7 \cdot t^2 + 0,5 \cdot t - 5}$$

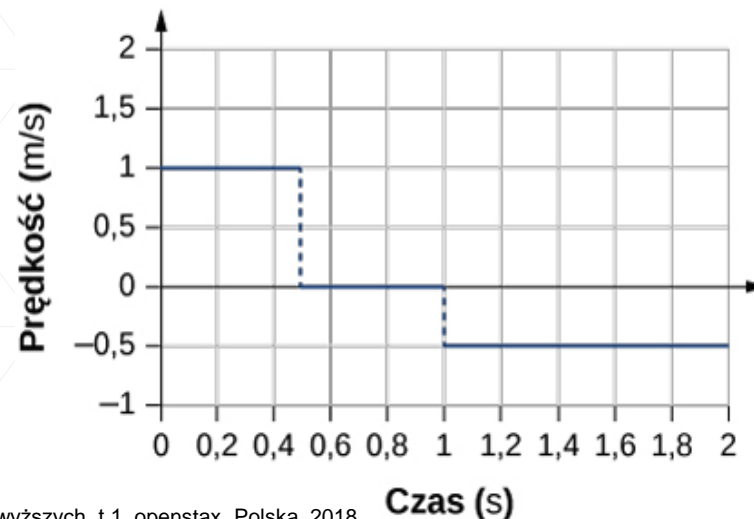


# Obliczanie prędkości na podstawie wykresu $x(t)$

Położenie w funkcji czasu



Prędkość w funkcji czasu



W. Moebis, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

W przedziale czasu  $\langle 0; 0,5 \rangle$  ciało oddala się od początku układu współrzędnych – prędkość jest **dodatnia**. W kolejnym przedziale czasu  $\langle 0,5; 1,0 \rangle$ , położenie się nie zmienia, prędkość jest **zerowa**. Natomiast dla przedziału czasu  $\langle 1,0; 2,0 \rangle$  ciało porusza się wstecz, w stronę początku układu współrzędnych – ma wtedy **przeciwny kierunek ruchu** oraz **ujemną** prędkość. Wartości prędkości w kolejnych przedziałach czasu są różne, prędkość średnia w czasie całego ruchu ( $t=2s$ ) wynosi zero,

$$\text{szybkość z jaką poruszało się ciało} - sZ_{\text{śr}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,5+0,5}{2} = 0,5 \text{ m/s}$$

# Prędkość chwilowa czyli „prędkość ciała w danej chwili czasu”

- Jak określić prędkość ciała, gdy ona się ciągle zmienia?
- należy wyznaczyć prędkość średnią w bardzo krótkim odstępie czasu, czyli policzyć:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

przy zmniejszaniu się  $\Delta t$  średnia prędkość dąży do granicy, którą jest prędkość w danej chwili

- $v$  – jest szybkością zmiany położenia cząstki przy zmianie czasu w danej chwili (mówimy, że  $v$  jest pochodną  $x$  względem  $t$ )

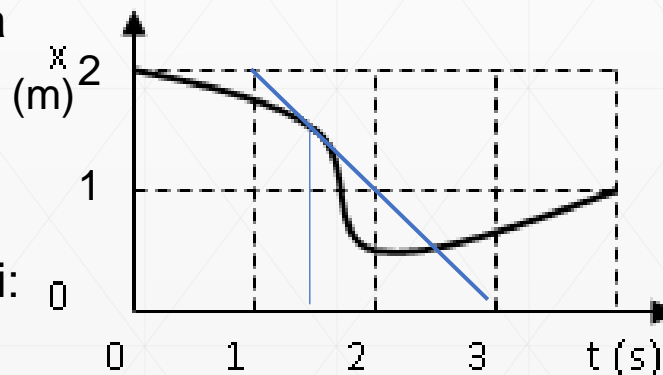
- formalnie powinniśmy zapisać:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} \left[ \frac{m}{s} \right]$$

- jeżeli na wykresie przedstawimy jak zmienia się położenie ciała w funkcji czasu to wartość  $v$  jest równa nachyleniu prostej stycznej do wykresu  $x = f(t)$ .

W chwili  $t = 1,5$  s prędkość chwilowa wynosi:

$$v = \frac{2}{2} = 1 \left[ \frac{m}{s} \right]$$



# Prędkość chwilowa i szybkość średnia

M-4\_czas a tor ruchu



[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ULTRALYTE\\_983.8\\_m.jpg?uselang=pl](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ULTRALYTE_983.8_m.jpg?uselang=pl)

Czy tych panów interesuje szybkość średnia czy prędkość chwilowa?<sub>11</sub>

# Przyspieszenie

W języku potocznym przyspieszać oznacza zwiększać prędkość.

**Przyspieszenie** średnie jest zmianą prędkości w pewnym przedziale czasu – miara zmiany prędkości  $v(t)$  w czasie.

$$a_{\text{śr}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{zmiana prędkości}}{\Delta t}$$

$a > 0$  i  $v > 0$  – prędkość rośnie – ruch przyspieszony

$a < 0$  i  $v > 0$  – prędkość maleje – ruch opóźniony

Przyspieszenie w danej chwili czasu definiujemy jako pochodną prędkości po czasie:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

W ruchu jednostajnie zmiennym przyspieszenie jest stałe:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \text{const.}$$

# Ruch ze stałym przyspieszeniem

Gdy przyspieszenie jest stałe ( $a = \text{const.}$ ) to przyspieszenie średnie równe jest chwilowemu:

$$a = a_{\text{sr}} = \frac{v - v_0}{t - 0} \quad \Rightarrow \quad v = v_0 + at$$

Podobnie:

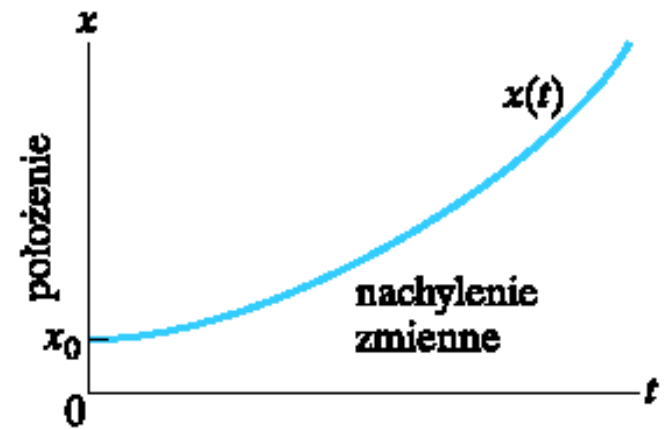
$$v_{\text{sr}} = \frac{x - x_0}{t - 0} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + v_{\text{sr}} t$$

Prędkość zmienia się liniowo w czasie, więc:

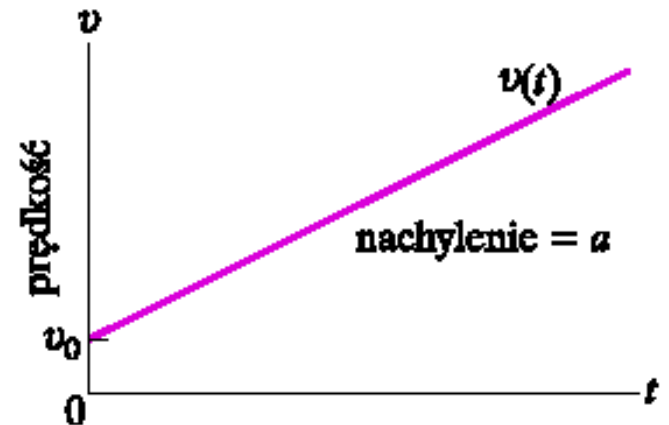
$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(v_0 + v) = v_0 + \frac{1}{2}at$$

Podstawowe równania ruchu ze stałym przyspieszeniem

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$



a)



b)



c)

# Ruch prostoliniowy jednostajnie opóźniony

Jeżeli przyspieszenie jest zwrócone w przeciwną stronę do prędkości ruchu ciała, to wartość prędkości będzie coraz mniejsza i ruch będzie ruchem opóźnionym. Ponieważ prędkość ciała  $v_2$  w chwili  $t_2$  jest mniejsza od  $v_1$ , to przyspieszenie staje się ujemne:

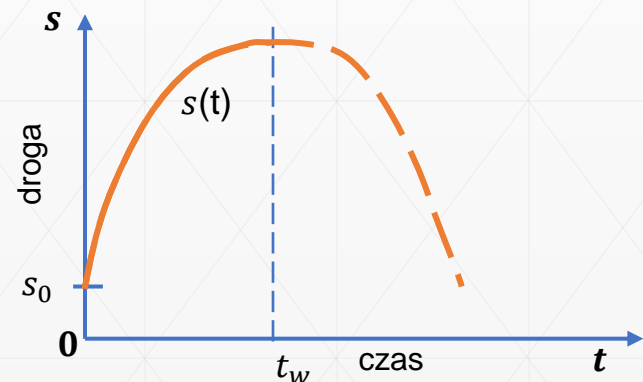
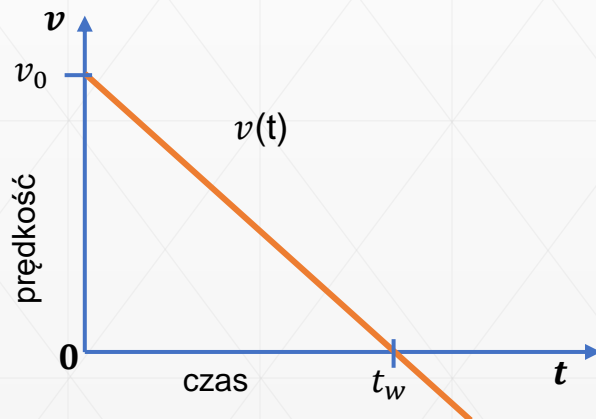
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} < 0$$

Wzory na prędkość i drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym przechodzą na wzory dla ruchu jednostajnie opóźnionego, gdy zmienimy znak przy module  $a$  na ujemny.

Prędkość w ruchu **jednostajnie opóźnionym**:  $v = v_0 + at = v_0 - |a|t$

Droga w ruchu **jednostajnie opóźnionym**:  $s = s_0 + v_0t + \frac{at^2}{2} = s_0 + v_0t - \frac{|a|t^2}{2}$

Widać więc, że prędkość maleje liniowo z czasem ruchu, natomiast wykres drogi  $s(t)$  jest parabolą zwróconą ramionami do dołu. Czas  $t_w$  to czas w którym prędkość maleje do zera (czas hamowania).





# Spadek swobodny

W końcu XVI wieku Galileusz przeprowadził słynne doświadczenie. Z wierzchołka „Krzywej Wieży” w Pizie puścił On jednocześnie ciała o różnych ciężarach (klocki drewna, bryłki gliny, kawałki stali i ołowiu) i stwierdził, że czasy ich spadania są jednakowe. Wniosek: ruch ciał swobodnie spadających jest ruchem jednostajnie przyspieszonym, ze stałym przyspieszeniem  $g$ , niezależnym od ciężaru ciała.

Przyspieszenie to nazywamy przyspieszeniem ziemskim, a jego wartość bezwzględna wynosi  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .





# Swobodne spadanie ciał

Każde ciało rzucone w górę lub w dół w pobliżu powierzchni Ziemi doznaje przyspieszenia o stałej wartości skierowanego w dół.

Przyspieszenie swobodnego spadku ciała jest więc równe  $a = -g = -9,8 \text{ m/s}^2$ . Nie zależy ono od właściwości przedmiotu: masy, kształtu.

Swobodne spadanie ciał opisujemy wzorami na drogę  $s = v_0 \cdot t + a \frac{t^2}{2}$  i prędkość  $v = v_0 + at$  w ruchu jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową  $v_0 = 0$  i przyspieszeniem  $a = g$  zwróconym ku dołowi, czyli:

$$s = g \frac{t^2}{2} ; \quad v = gt$$

Jeżeli ciało spada swobodnie z wysokości  $h$ , to czas jego spadku i prędkość w chwili upadku wynoszą:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad v = g \cdot t = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

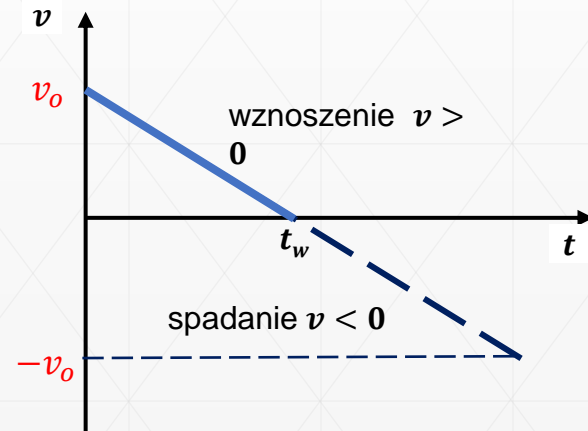
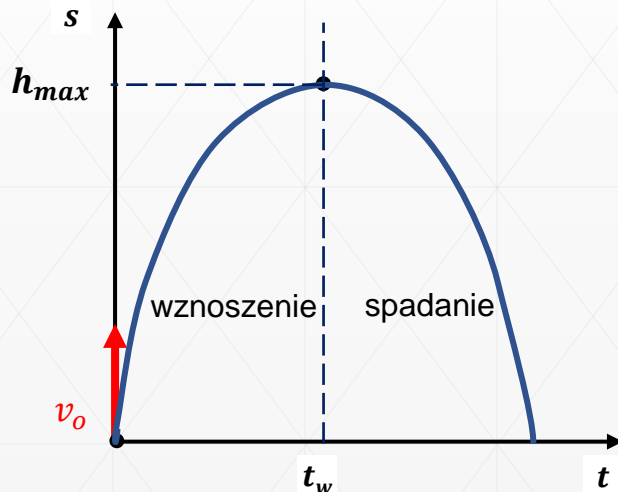
**Zasada Galileusza – prędkość w spadku swobodnym nie zależy od masy ciała, a tylko od wysokości z jakiej spada.**

# Rzut pionowy w górę

Rzuceniem pionowym nazywamy ruch ciała rzuconego pionowo w górę z określoną prędkością początkową  $v_0$ .

Rzut pionowy ciała opisujemy wzorami na drogę  $s = v_0 \cdot t + a \frac{t^2}{2}$  i prędkość  $v = v_0 + at$  w ruchu jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową  $v_0$ . W rzucie pionowym możemy wyodrębnić dwa etapy:

- ruch w górę, który jest ruchem jednostajnie opóźnionym (ciało podlega przyspieszeniu  $a = -g$ , skierowanemu przeciwnie niż prędkość początkowa  $v_0$ ). Ruch ten trwa do chwili  $t = t_w$  kiedy ciało osiągnie największą wysokość  $s = h_{max}$ , czyli prędkość będzie równa zero ( $v = 0$ );
- spadku swobodnego, czyli ruchu jednostajnie przyspieszonego z prędkością początkową  $v_0 = 0$  i przyspieszeniem  $a = -g$ . Prędkość i przyspieszenie mają ujemny znak, gdyż są skierowane przeciwnie do kierunku osi OY tj. w dół.



# Podsumowanie

1. Poznaliśmy podstawowe definicje i wielkości związane z ruchem ciał, czyli podstawy kinematyki.
2. Zaniedbaliśmy rozmiary ciała stosując model punktu materialnego, co pozwala nam ograniczyć się do najprostszycch przypadków ruchu.
3. Wiemy, że dla opisu ruchu ciała konieczne jest wprowadzenie układu odniesienia.
4. Potrafimy określić rodzaj ruchu i wyznaczyć prędkość oraz przyspieszenie ciała w tym ruchu.
5. Potrafimy określić zachowanie się ciała w swobodnym spadku lub rzucie pionowym.
6. W opisie kinematycznym pominęliśmy przyczyny wywołujące ruch ciała.