



Edinburgh, Scotland, October 2009

15. Fale elektromagnetyczne

- równanie fali elektromagnetycznej,
- oddziaływanie promieniowania z materią,
- współczynnik załamania ośrodka,
- widmo fal elektromagnetycznych,
- źródła fal elektromagnetycznych.



James Clerk-Maxwell

(13.06.1831 – 5.11.1879), fizyk szkocki



James Clerk Maxwell.

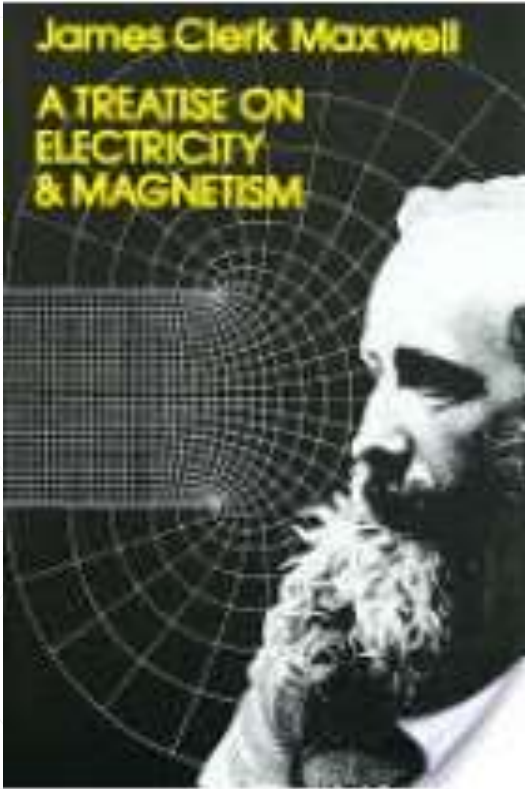
Jeden z największych fizyków w historii nauki, autor wielu wybitnych prac z zakresu elektrodynamiki, kinetycznej teorii gazów, optyki i teorii barw.

Warto wiedzieć, że nazwisko tego słynnego fizyka to Clerk-Maxwell.

Maxwell dokonał unifikacji oddziaływań elektrycznych i magnetycznych to znaczy udowodnił, że elektryczność i magnetyzm są dwoma rodzajami tego samego zjawiska - elektromagnetyzmu.

Na jego cześć jednostkę strumienia magnetycznego nazwano makswelem.

Do końca życia odrzucał teorię ewolucji Darwina.



1820 – Oersted odkrycie zjawiska elektromagnetycznego

Faraday - odkrycie zjawiska indukcji elektromagnetycznej, rozwinięcie idei linii sił i wprowadza pojęcie pola.

Thomson matematyczne opracowanie koncepcji Faradaya.

Od pary do elektryczności - od ok. 1861 teoria elektromagnetyzmu J. C. Maxwell powstająca stopniowo:

I i **II** – (1861, 1862 – *Physical Lines of Force*) opis linii sił Faradaya za pomocą rachunku wektorowego

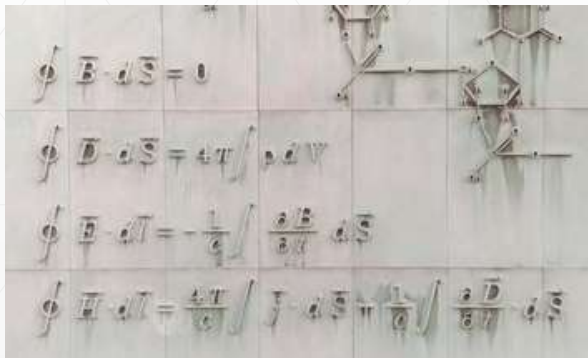
II – drgania ośrodka związanego z liniami sił mają naturę światła

III – pojawia się stała oznaczona przez **c** której wartość okazała się równa prędkości światła

IV – odrzucenie mechanicznych modeli i zastosowanie w opisie jedynie związków pomiędzy polem **E** i **B**, kolejny uproszczenie zapisów.

1873 - Traktat – cel to nie nowa teoria ale nauczenie się jej samemu poprzez refleksję nad jej wynikami

1888 – Hertz doświadczalnie stwierdza istnienie fal elm.



Sciana Biblioteki UW

I równanie Maxwella

Uogólnione prawo indukcji Faradaya

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Postać całkowa

Krażenie pola elektrycznego \vec{E} po dowolnej krzywej zamkniętej (konturze) C jest proporcjonalne od szybkości zmian strumienia Φ_B indukcji magnetycznej \vec{B} przez dowolną powierzchnię rozpiętą na konturze C .

Zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne, które może wywoływać prąd elektryczny.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

Postać całkowa
z wektorem \vec{H}

I równanie Maxwella

Uogólnione prawo indukcji Faradaya

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Postać różniczkowa

Rotacja pola elektrycznego \vec{E} w punkcie jest równa szybkości zmian (cząstkowej pochodnej czasowej) indukcji pola magnetycznego \vec{B} . Znak minus we wzorze wynika z [reguły Lenza](#) – wytworzone pole elektryczne przeciwstawia się zmianom wywołanym przez pole magnetyczne.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0\mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

Postać różniczkowa
z wektorem \vec{H}

II równanie Maxwella

Rozszerzone prawo Ampera-Maxwella

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \int_S (\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Postać całkowa}$$

Krażenie pola magnetycznego \vec{H} po dowolnej krzywej zamkniętej (konturze) C jest sumą: wkładu generowanego przez przepływ prądu I przez dowolną powierzchnię S rozpiętą na tym konturze oraz wkładu od szybkości zmian strumienia Φ_D pola elektrycznego \vec{D} przez dowolną powierzchnię rozpiętą na konturze C .

Prąd elektryczny \vec{j} lub zmienne pole elektryczne $\partial \vec{D} / \partial t$ wytwarzają wirowe pole magnetyczne \vec{H}

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mu_r \int_S (\vec{J} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Postać całkowa z wektorem } \vec{B}^7$$

II równanie Maxwella

Rozszerzone prawo Ampera-Maxwella

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Postać różniczkowa

Rotacja pola magnetycznego \vec{H} w dowolnym punkcie jest sumą: wkładu generowanego przez przepływ prądu w tym punkcie \vec{j} oraz wkładu od szybkości zmian pola elektrycznego \vec{E} .

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \mu_r \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Postać różniczkowa
z wektorem \vec{B}

III równanie Maxwella

Prawo Gaussa dla pola elektrostatycznego

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} Q = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \int_V \rho_E dV$$

Postać całkowa

Strumień pola elektrycznego \vec{E} przez dowolną powierzchnię zamkniętą S jest proporcjonalny do ładunku Q obejmowanego przez tą powierzchnię.

Ładunek elektryczny wytwarza pole elektryczne

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_E dV$$

Postać całkowa z wektorem indukcji elektrycznej \vec{D}

III równanie Maxwella

Prawo Gaussa dla pola elektrostatycznego

$$\operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rho_E \quad \text{Postać różniczkowa}$$

Dywergencja (źródłowość) pola elektrycznego \vec{E} jest w każdym punkcie proporcjonalna do gęstość ładunku elektrycznego.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_E \quad \text{Postać różniczkowa z wektorem indukcji elektrycznej } \vec{D}$$

IV równanie Maxwella

Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0$$

Postać całkowa

Strumień indukcji pola magnetycznego \vec{B} przez dowolną zamkniętą powierzchnię S jest zawsze zerowy.

**Nie istnieje w przyrodzie ładunek magnetyczny.
Pole magnetyczne jest bezźródłowe**

$$\oint_S \vec{H} \cdot \vec{dS} = 0$$

Postać z wektorem natężenia
pola magnetycznego \vec{H}

IV równanie Maxwella

Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Postać różniczkowa

Dywergencja (źródłowość) pola indukcji magnetycznej \vec{B} jest w każdym punkcie zerowa.

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0$$

Postać z wektorem natężenia
pola magnetycznego \vec{H}

Równania Maxwella

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

równania materiałowe

- Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho dV$$

wiąże wypadkowy strumień elektryczny z ładunkiem elektrycznym objętym powierzchnią Gaussa

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

wiąże wypadkowy strumień magnetyczny z ładunkiem magnetycznym objętym powierzchnią Gaussa

- Uogólnione prawo indukcji elektromagnetycznej

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

wiąże indukowane pole elektryczne ze zmiennym strumieniem magnetycznym

- Rozszerzone prawo Ampera – Maxwella

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

wiąże indukowane pole magnetyczne ze zmiennym strumieniem elektrycznym i z prądem

Porównanie dwóch równań Maxwella

Weźmy równania Maxwella mówiące o tworzeniu pola magnetycznego z pola elektrycznego i vice versa. Widać dużą symetrię. Asymetria jest w miejscu zaznaczonym **czerwoną ramką**.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \boxed{-} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Uogólnione prawo indukcji Faradaya

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Rozszerzone prawo Ampere-Maxwella

Znak „-” pojawia się tylko w uogólnionym prawie Faradaya, w rozszerzonym prawie Ampere-Maxwella tego znaku nie ma. Gdyby znaki „-” były w obu równaniach równania nie dałyby równania fali elektromagnetycznej.

Cechy równań Maxwella

- Równania Maxwella stanowią fundamentalną podstawę teorii zjawisk elektromagnetycznych, podobnie jak zasady dynamiki Newtona są podstawą mechaniki.
- Zebranie i skojarzenie czterech równań wiążących pole elektryczne i magnetyczne w jeden układ równań było pod koniec XIX wieku tryumfem elektrodynamiki klasycznej.
- Można znaleźć pola \vec{E} i \vec{B} w dowolnym punkcie przestrzeni i w dowolnej chwili czasu, jeżeli znane są współrzędne i prędkości ładunków wytwarzających pola.
- Równania Maxwella są niesymetryczne względem pól elektrycznego i magnetycznego (istnieją ładunki elektryczne a brak jest ładunków magnetycznych).
- W przypadku stacjonarnym pola \vec{E} i \vec{B} są niezależne:

$$\oint_C \vec{D} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho dV$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0$$

Równania Maxwella w postaci różniczkowej

- Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

źródłowość pola – ładunek elektryczny wytwarza pole elektryczne

- Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

nie istnieje ładunek magnetyczny, pole magnetyczne jest bezźródłowe

- Prawo indukcji elektromagnetycznej

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

zmienne pole magnetyczne wytwarza wirowe pole elektryczne (prąd elektryczny)

- Uogólnione prawo Ampera

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

prąd elektryczny lub zmienne pole elektryczne wytwarzają wirowe pole magnetyczne

Założmy, że $E_x=E_z=0$, $E=E_y \neq 0$ oraz $B=B_z \neq 0$, $B_x=B_y=0$.
Z równań Maxwella mamy, że

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{i} \quad \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(1) \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$(2) -\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$(1) \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x}$$

$$(2) -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

$$(1) \frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$(2) -\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$$

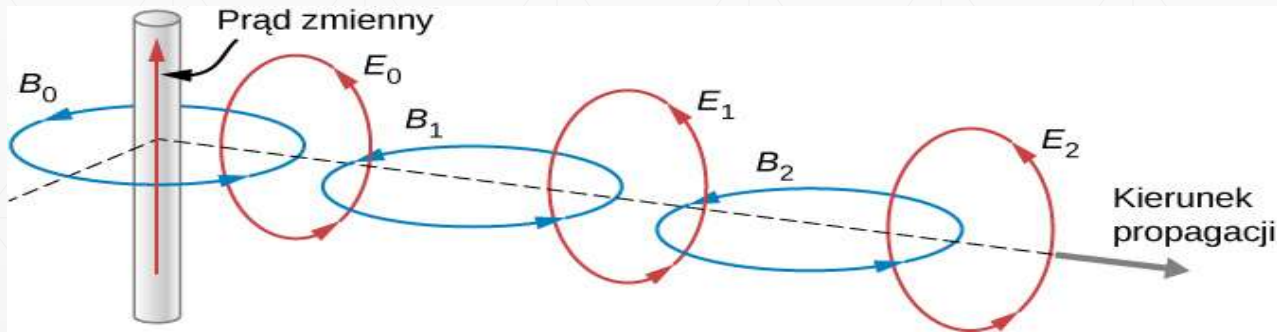
Równanie fali o prędkości fazowejj

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Podstawiając $\epsilon_0 = 8.12 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm})$ i $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}/(\text{Am})$ do wzoru na prędkość rozchodzenia się zaburzenia pola elektromagnetycznego, otrzymamy

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} \equiv c$$

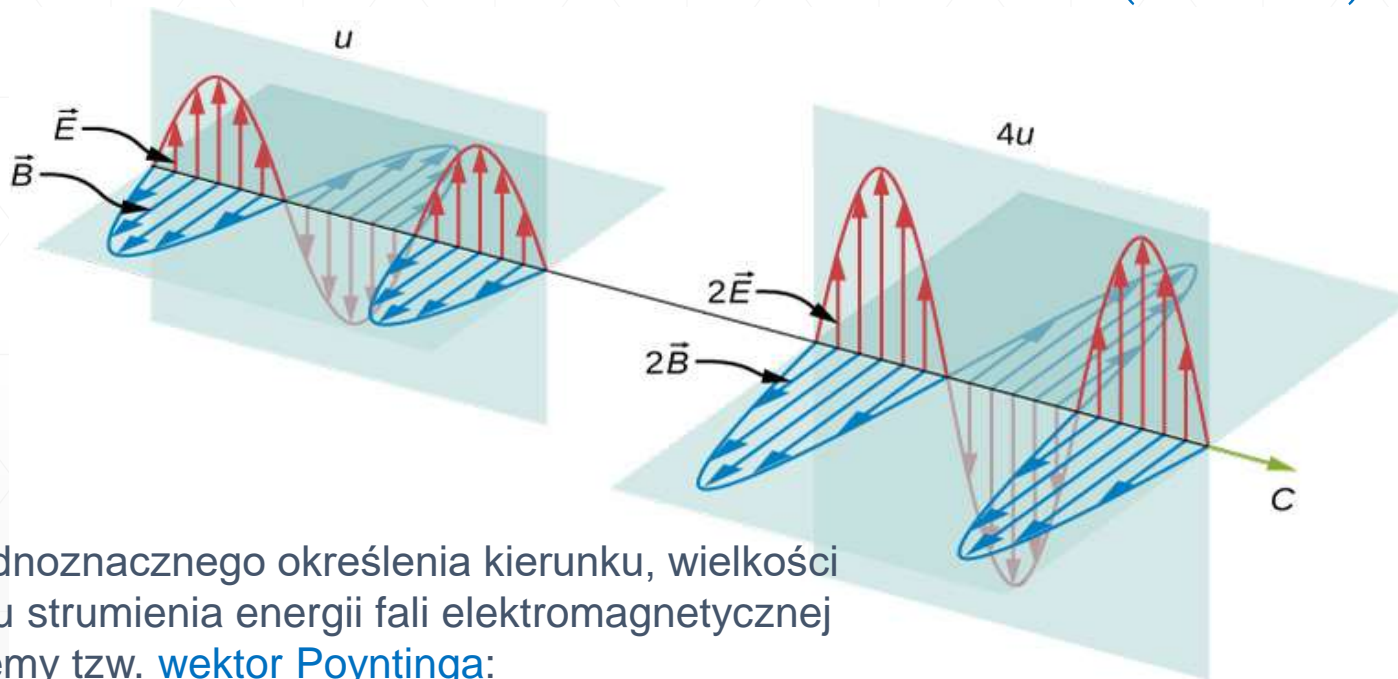
A więc fale elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła, Pola E i B są polami sprzężonymi. Rozwiązania równań Maxwella opisują płaską falę elektromagnetyczną biegnącą wzdłuż osi x z prędkością c .



Energia przenoszona przez falę

W jednostce objętości pola elektromagnetycznego zgromadzona jest energia (uwzgl. $E = cB$).

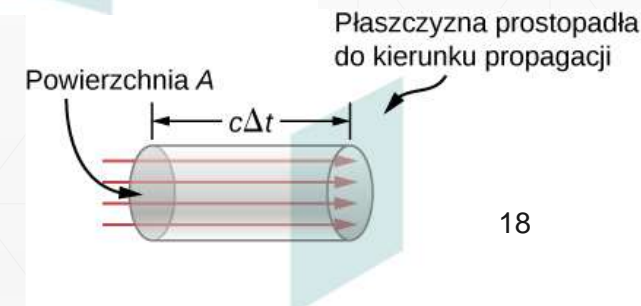
$$e_{EB} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E c \mu_0 H + \frac{1}{2} \frac{E \mu_0 H}{c \mu_0} = EH \left(\frac{1}{2} \frac{c}{c^2} + \frac{1}{2c} \right) = \frac{1}{c} EH$$



Dla jednoznacznego określenia kierunku, wielkości i zwrotu strumienia energii fali elektromagnetycznej stosujemy tzw. **wektor Poyntinga**:

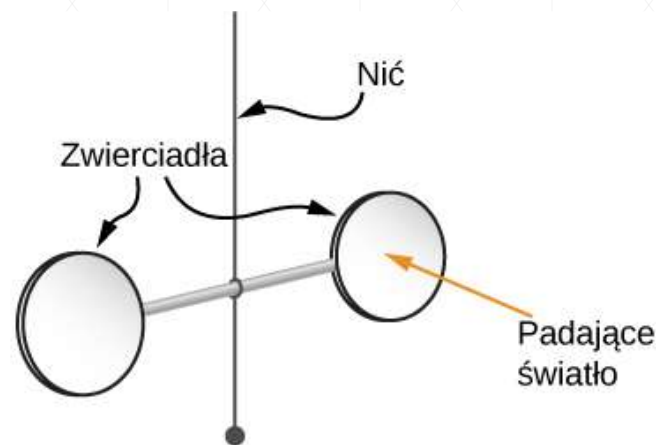
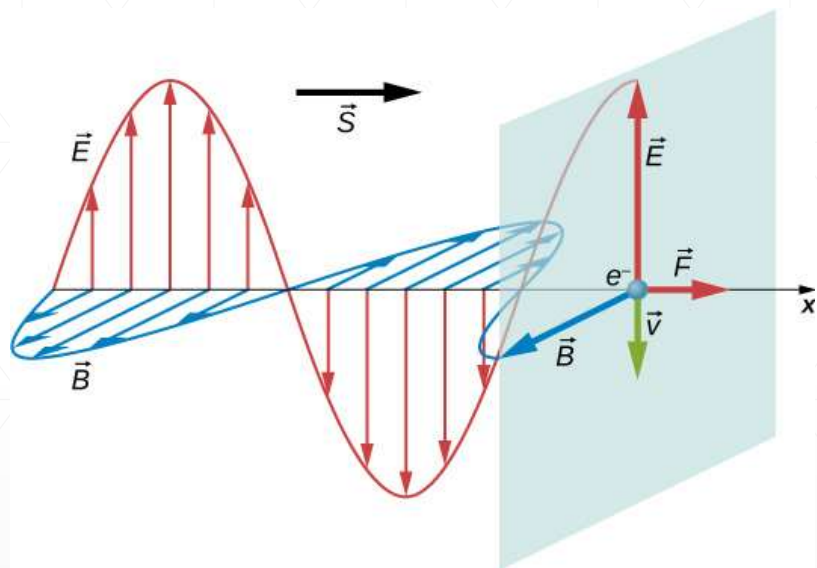
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$S = c e_{EB} = EH$$



Pęd i ciśnienie promieniowania elm

Wzajemnie oddziałujące pola elektryczne i magnetyczne, indukowane przez falę elektromagnetyczną, wytwarzają siłę działającą w kierunku rozchodzenia się fali, jak przedstawiono to poniżej na przykładzie elektronów poruszających się w metalu i wysoce tłumionych przez jego opór. Zatem fale elm. niosą ze sobą pęd (hipoteza Maxwella)



Schemat aparatury Nicholisa i Hulla do pomiaru ciśnienia promieniowania wg hipotezy Maxwella

Ciśnienie promieniowania (radiation pressure) wywierane przez fale elm. na doskonale absorbującą powierzchnię jest równe gęstości energii tej fali.

$$p_{pr} = e_{EB} \text{ (idealny absorber)}$$

$$p_{pr} = 2e_{EB} \text{ (idealne zwierciadło)}$$

Powyższe to ciśnienie chwilowe, zaś ciśnienie uśrednione wyraża się poprzez natężenie fali elm. I jako

$$p = \langle p_{pr} \rangle = \frac{I}{c} \text{ (idealny absorber)}$$

$$p = \langle p_{pr} \rangle = \frac{2I}{c} \text{ (idealne zwierciadło)}$$

Oddziaływanie promieniowania z materią

Oprócz omówionych w dalszych wykładach oddziaływania fali elektromagnetycznej w ujęciu korpuskularnym jako fotonów z atomami ośrodka na drodze czterech procesów: zjawiska fotoelektrycznego, tworzenie par, zjawiska Thomsona i zjawiska Comptona, oddziaływanie promieniowania z materią w ujęciu makroskopowym opisane jest poprzez podane **równania materiałowe (równania konstytutywne)**

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad \text{oraz} \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad \vec{D} = \langle \varepsilon \rangle \vec{E} \quad \text{oraz} \quad \vec{B} = \langle \mu \rangle \vec{H}$$

Padające na dany ośrodek zmienne pole elektromagnetyczne (wyrażone poprzez wektory natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} oraz magnetycznego \mathbf{H}) powoduje wzbudzenie w tym ośrodku wektora indukcji elektrycznej \mathbf{D} oraz magnetycznej \mathbf{B} poprzez elektryczne i magnetyczne właściwości ośrodka zawarte ogólnie w tensorach przenikalności elektrycznej $\langle \varepsilon \rangle$ oraz magnetycznej $\langle \mu \rangle$.

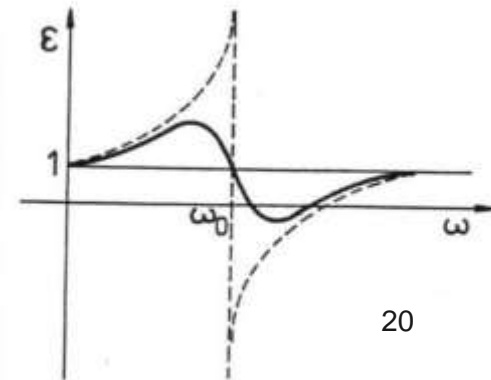
Oddziaływanie światła z materią = pobudzenie drgań elektronów ośrodka:

- dla elektronów związanych z jądrami – drgania bez tłumienia (dielektryk)

$$\varepsilon = 1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

- dla elektronów swobodnych (przewodnik, gaz zjonizowany)

$$\varepsilon = 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2}$$



(dla wystarczająco niskich częstości: ε jest urojony – odbicie fali)

Ośrodki dielektryczne (stała wartość tensora przenikalności magnetycznej):

- **izotropowy** $\langle \epsilon \rangle = \epsilon_r \epsilon_0$

$$\langle \epsilon \rangle \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

- **dyspersyjny** $\langle \epsilon \rangle = \epsilon(\lambda)$

- **nieliniowy** $\langle \epsilon \rangle = \epsilon(E^2, E^3, \dots)$

- **anizotropowy** $\langle \epsilon \rangle \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$

Współczynnik załamania (refractive index) ośrodka opisuje **zmianę prędkości** fali w ośrodku

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu}$$

C - prędkość światła w próżni, **v** – prędkość światła w ośrodku, **ϵ , μ** – względne przenikalności: elektryczna i magnetyczna ośrodka

W ogólnym przypadku współczynnik załamania można traktować **jako wielkość zespoloną**: część rzeczywista odpowiada m.in. za załamanie (optyka geometryczna – dalsze wykłady), część urojona za tłumienie

Widmo fal elektromagnetycznych

Przenika atmosferę ziemską?

tak nie tak nie



Typ promieniowania
Długość fali (m)

radiowe

10^3



budynki

mikrofale

10^{-2}



człowiek

podczerwień

10^{-5}



motyl



ostrze igły

światło widzialne

$0,5 \times 10^{-6}$



najmniejsze pierwotniaki

ultrafiolet

10^{-8}



duże cząsteczki

rentgenowskie

10^{-10}



atomy

gamma

10^{-12}



jądra atomowe

Obiekt o skali zbliżonej do długości fali

Częstotliwość (Hz)

10^4

10^8

10^{12}

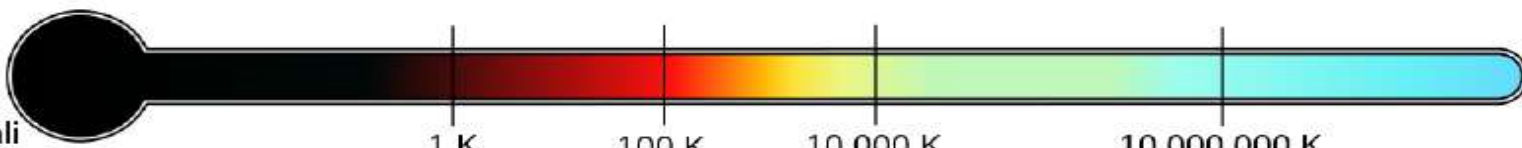
10^{15}

10^{16}

10^{18}

10^{20}

Temperatura ciała emitującego promieniowanie o podanej długości fali



1 K
-272 °C

100 K
-173 °C

10 000 K
9 727 °C

10 000 000 K
~10 000 000 °C

Światło widzialne

Podczerwień Pomarańczowy Zielony Fioletowy Ultrafiolet
Czerwony Żółty Niebieski

800

700

600

500

400

300

22

λ (nm)

Źródła fal elektromagnetycznych

Rodzaj fal	Wytwarzanie	Zastosowanie	Problemy
Radiowe ($\lambda > 0.1$ m; $f = 3$ Hz- 108 MHz): radiowe AM i FM; telefonii komórkowej; televizji	Przyspieszanie ładunków (prąd zmienny w antenie)	Komunikacja Zdalne sterowanie Rezonans magnetyczny	Do użycia wymagają kontroli pasm
Mikrofalowe ($f = 10^9 - 10^{12}$ Hz): kuchenki – 2,45 GHz; WiFi 2,4 i 5 GHz; Bluetooth 2,4 GHz	Przyspieszenie ładunków w urządzeniach makroskopowych i obwodach; Przejścia elektronowe; Kosmiczne promieniowanie tła	Komunikacja Kuchenki mikrofalowe Radary Telefony komórkowe	
Podczerwień	Wzbudzenie termiczne lub przejścia elektronowe	Obrazowanie termiczne Podgrzewanie	Są absorbowane przez atmosferę. Wiąże się z nimi efekt cieplarniany
Światło widzialne ($\lambda = 400$ – 750 nm)	Wzbudzenie termiczne lub przejścia elektronowe	Fotosynteza Ludzkie widzenie	
Ultrafiolet (nadfiolet) ($\lambda =$ 10 – 400 nm): UV-A, -B, -C	Wzbudzenie termiczne lub przejścia elektronowe	Sterylizacja Produkcja witaminy D	Mogą powodować raka
Promieniowanie X ($\lambda = 10^{-8} - 10^{-12}$ m):	Wewnętrzne przejścia elektronowe lub szybkie zderzenia	Bezpieczeństwo Diagnostyka medyczna Terapie rakowe	Mogą powodować raka
Promieniowanie gamma ($\lambda < 10^{-12}$ m):	Rozpad promieniotwórczy	Medycyna nuklearna Bezpieczeństwo Diagnostyka medyczna Terapie rakowe	Mogą powodować raka Powodują uszkodzenia

