10. Zjawiska elektryczne - I

10.1. Pole elektryczne w próżni:

- prawo Coulomba,
- pole elektrostatyczne,
- źródła pola elektrostatycznego: ładunki, dipole, kwadrupole.
- prawo Gaussa,
- potencjał elektrostatyczny,
- pojemność elektryczna,
- energia pola elektrostatycznego.

Podstawowe pojęcia elektrostatyki

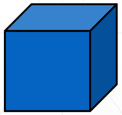
- elektrostatyka - zagadnienia związane
  z oddziaływaniem ładunków elektrycznych w spoczynku
- siły elektrostatyczne wywołane są ładunkiem elektrycznym
- ładunek elementarny $e = 1{,}60\times10^{-19}$ C
- ładunek elektronu = - e; ładunek protonu = + e
- każdy ładunek może być tylko wielokrotnością powyższych ładunków elementarnych – ładunek jest skwantowany
- ładunek punktowy, liniowy, powierzchniowy i objętościowy
- w układzie zamkniętym całkowity ładunek pozostaje stały

q

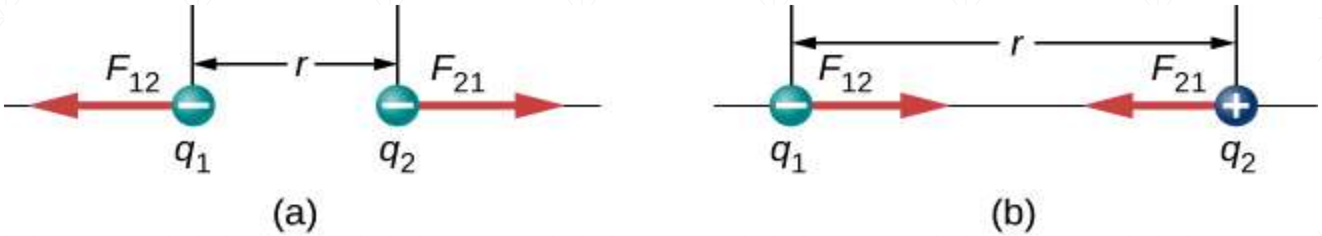
$$\lambda = \frac{q}{l}$$

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$$\rho = \frac{q}{V}$$



Prawo Coulomba



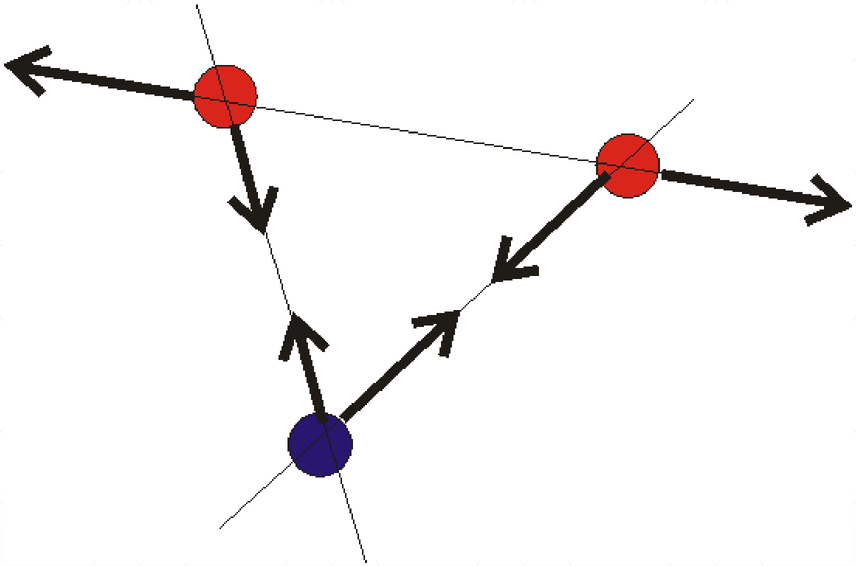
$$F = \underbrace{\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}}_{k}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_i$$

gdzie $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ C^2/(Nm^2)$ to przenikalność dielektryczna próżni

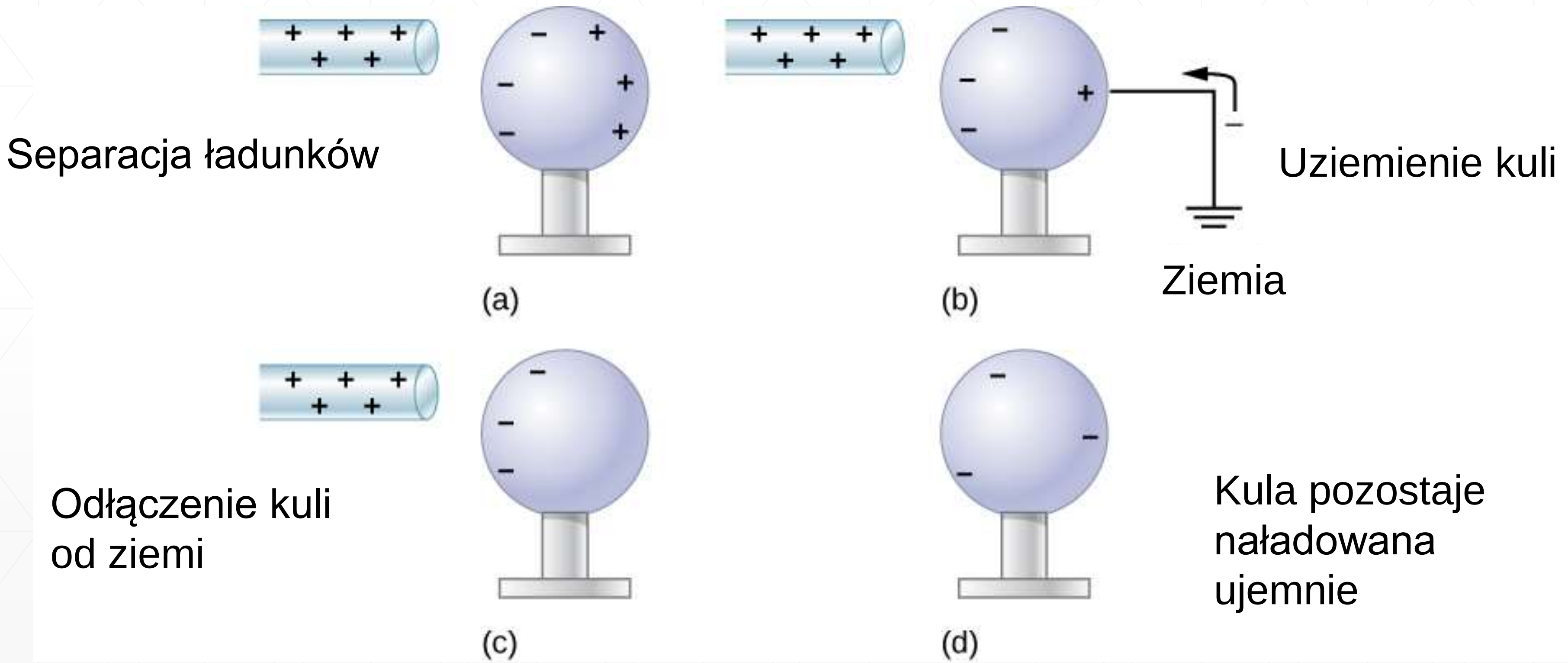
Odziaływanie pomiędzy metalowymi naładowanymi kulami traktujemy jak oddziaływanie wszystkich ich ładunków elementarnych umieszczonych w środkach ich mas

Zasada superpozycji

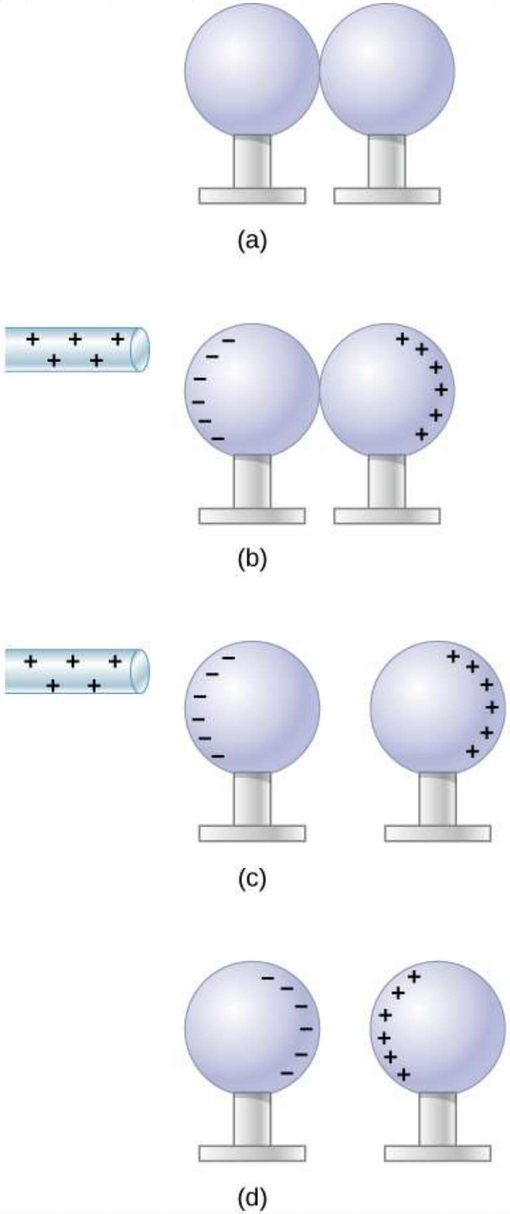


Siły oddziaływania coulombowskiego pomiędzy parą ładunków (np. czerwonych) nie ulegną zmianie jeśli pojawi się trzeci ładunek (niebieski). Inaczej mówiąc ładunki oddziałują parami tak jakby inne ładunki nie istniały. Jest to prawo eksperymentalne.

Elektryzowanie metalowych kul



Elektryzowanie metalowych kul



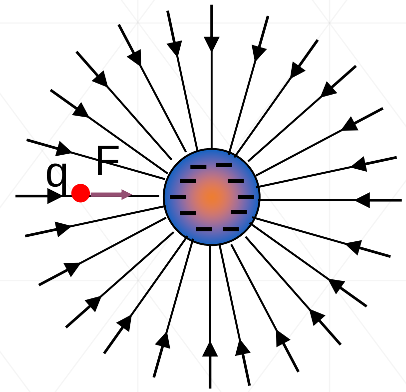
Zbliżamy naładowany pręt

Separacja ładunków

Rozdzielenie kul

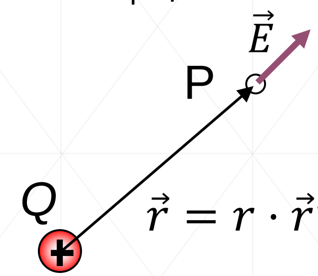
Każda kula jest naładowana, jedna dodatnio, druga ujemnie

Pole elektrostatyczne



- Natężenie pola elektrostatycznego

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$ [N/C] lub [V/m]



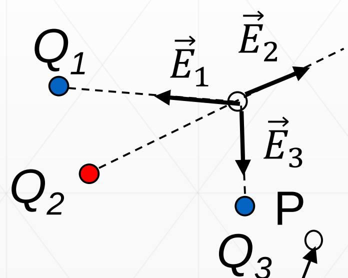
- Pole elektrostatyczne ładunku punktowego

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{Q}{r^2}\vec{r}'$$

gdzie $\vec{r}'$ jest wektorem jednostkowym skierowanym od ładunku Q do punktu $P(x, y, z)$

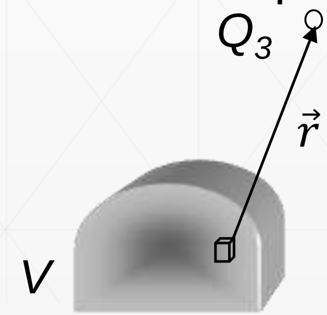
- Pole od n ładunków punktowych

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_o}\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{r_j^2}\vec{r}_j' = \sum_{j=1}^{n}\vec{E}_j\,(x,y,z)$$



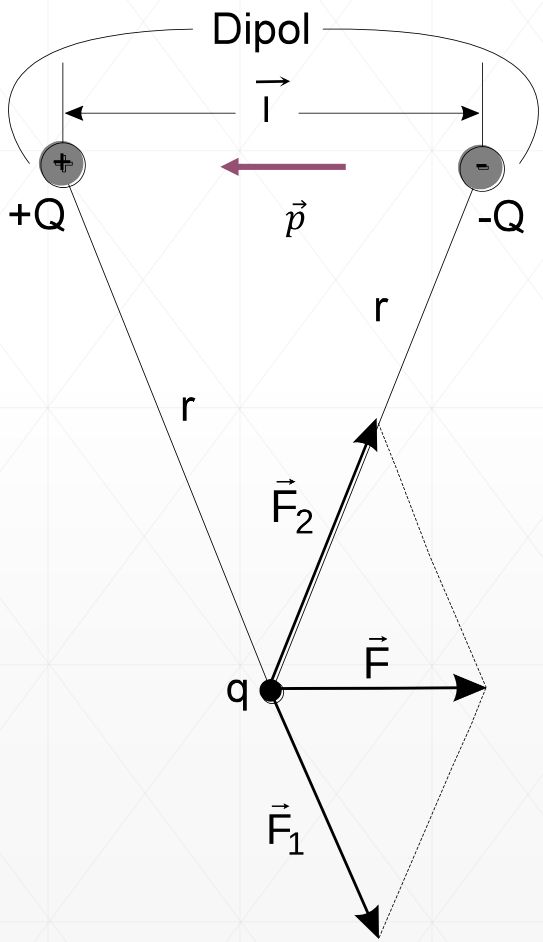
- Pole od ładunku rozłożonego z gęstością ρ

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_V \frac{\rho(x,y,z)}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}dxdydz$$



Dipol elektryczny

Dipol elektryczny to układ dwóch ładunków o jednakowej wartości, lecz przeciwnych znakach, rozsuniętych na odległość *l*



moment dipolowy $\vec{p} = Q\vec{l}$

z podobieństwa trójkątów $\frac{F}{F_1} = \frac{l}{r}$

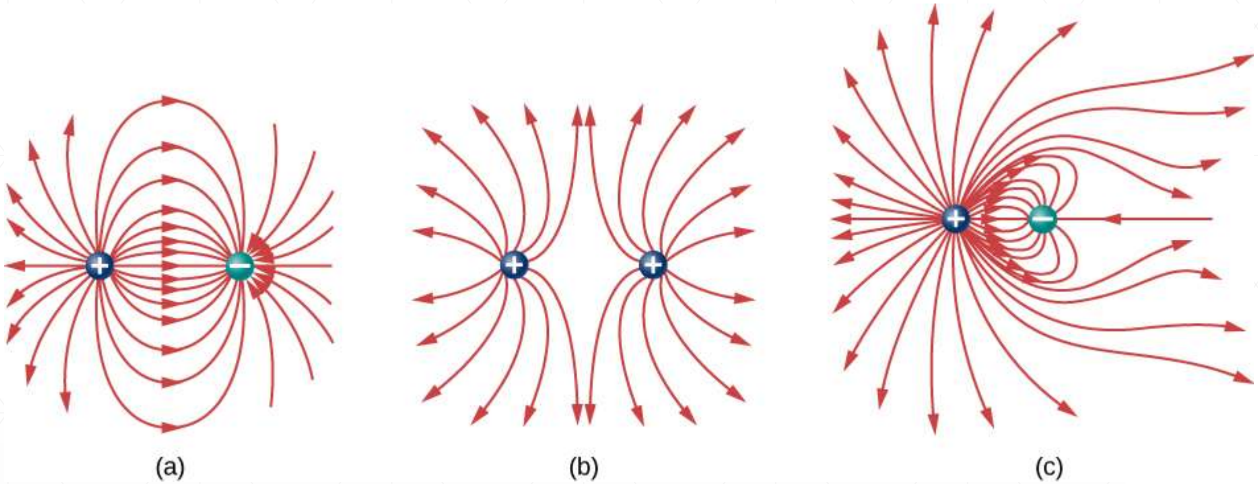
$$F = \frac{l}{r}F_1 = \frac{l}{r}\left(k\frac{Qq}{r^2}\right) = qk\frac{p}{r^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o}\frac{p}{r^3}$$

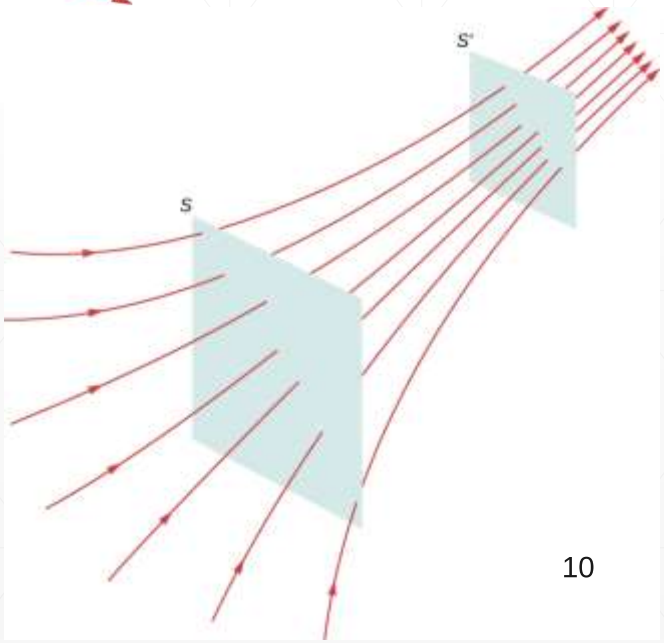
Pole elektrostatyczne dipola szybko maleje z odległością

Linie sił pola elektrycznego

Różne rozkłady ładunków



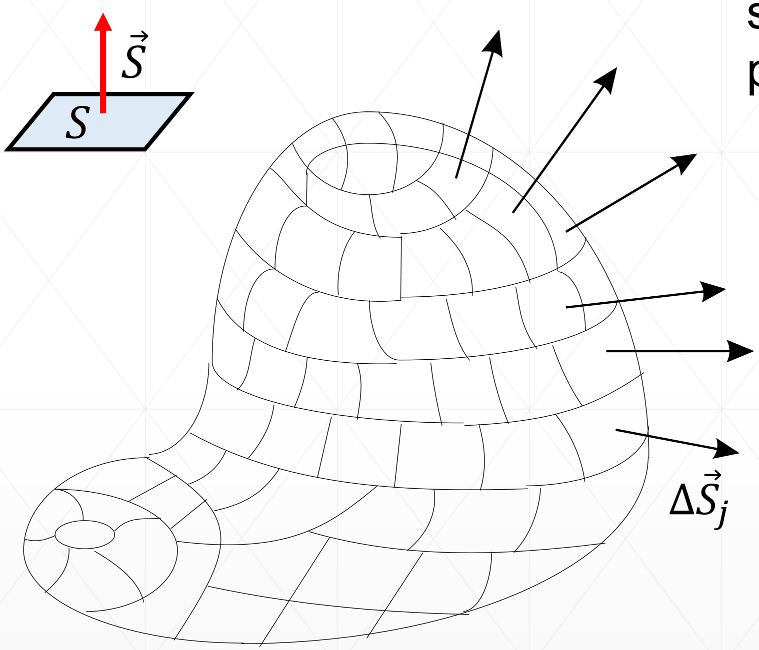
Gęstość linii ~ miara natężenia pola



Linie sił pola

W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

Strumień pola elektrycznego



strumień to iloczyn natężenia pola przez powierzchnię

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = EScos\alpha \qquad [\mathrm{Vm}]$$

$$\Phi_E = \sum_j \vec{E}_j \cdot \Delta\vec{S}_j = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

strumień określa liczbę linii sił pola przechodzących przez daną powierzchnię

Prawo Gaussa

- strumień natężenia pola elektrostatycznego przez dowolną, zamkniętą powierzchnię równy jest całkowitemu ładunkowi zamkniętemu w tej powierzchni podzielonemu przez ε_o

$$\Phi_E = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{q_i}{\varepsilon_o}$$

- w przypadku ładunku o gęstości objętościowej

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_V \rho dV$$

Prawo Gaussa

Strumień pola Φ_E od ładunku punktowego Q przez powierzchnie kuli o promieniu r

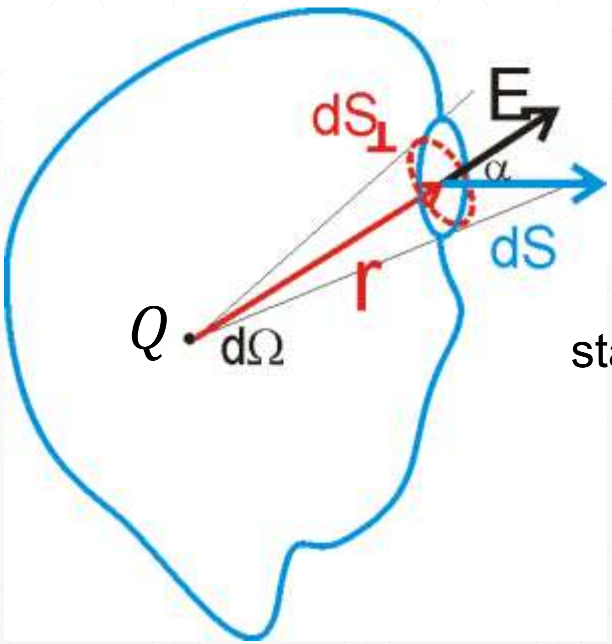
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{Q}{r^2} \vec{r}' \cdot \vec{r}' dS = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o r^2} \cdot 4\pi\, r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Jeżeli powierzchnia nie jest kulista

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS\, cos\alpha = E\, dS_\perp$$

$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = Er^2 d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$$



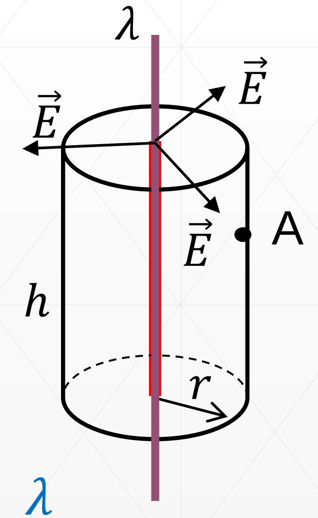
stąd prawo Gaussa

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_\Omega \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Algorytm wyznaczania natężenia pola z prawa Gaussa

- wybieramy powierzchnię Gaussowską:
  - prostopadłą lub równoległą do ***E***
  - tak aby ***E*** było stałe na tej powierzchni
- obliczamy strumień
- określamy ładunek zawarty wewnątrz tej powierzchni
- stosujemy prawo Gaussa
- obliczamy wartość pola ***E***

liniowy rozkład ładunku

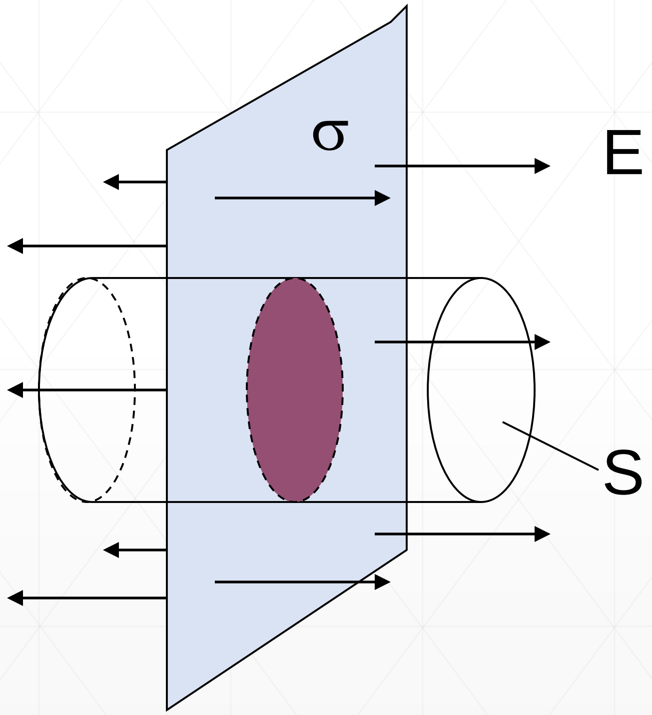


$$\Phi = \Phi_{pb} + 2\Phi_{pp} = \Phi_{pb} = E2\pi rh$$

$$Q = \lambda h$$

$$\Phi = Q/\varepsilon_o \Rightarrow E2\pi rh = \lambda h/\varepsilon_o \qquad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}$$

PRZYKŁAD - nieskończona płaszczyzna o gęstości powierzchniowej ładunku σ



$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\ E\ S$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}$$

Różniczkową postać prawa Gaussa

- Prawo Gaussa jest wygodnie stosować do rozkładów ładunku o dużej symetrii
- gdy tej symetrii nie ma stosujemy różniczkową postać prawa Gaussa wiążącą wielkości charakteryzujące pole i jego źródła w każdym punkcie
- przy małej objętości ΔV można przyjąć, że ładunek zawarty w tej objętości wynosi $\rho\Delta V$ czyli

$$\oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_o} \int_{\Delta V} \rho dV = \frac{\rho \Delta V}{\varepsilon_o}$$

- wykorzystując definicję dywergencji – rozbieżności pola

$$div\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho = \nabla\vec{E} \qquad div\vec{E} = \nabla\vec{E}$$

- zatem różniczkową postać prawa Gaussa to

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

Dywergencja jest wielkością skalarną będącą miarą liczby linii sił na jednostkę objętości. Jeżeli w danym punkcie $\rho \neq 0$, to w tym punkcie zaczynają się lub kończą nowe linie sił, jak $\rho = 0$ to nie powstają nowe linie sił w tym punkcie.

Energia potencjalna

Pole $\vec{E}$ jest polem bezwirowym

$$rot\vec{E} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{1}{\Delta l} \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Pole elektrostatyczne jest polem zachowawczym tzn.

$$W_{ABA} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

praca nie zależy od drogi

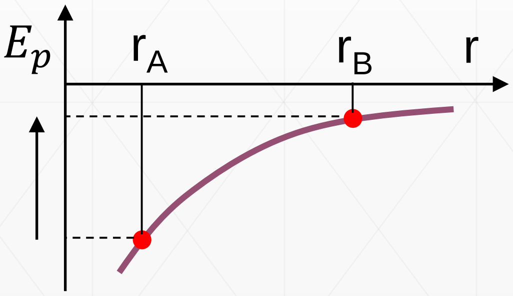
prawo Faradaya dla pola elektrosta-tycznego

- Energia potencjalna to praca jaką muszą wykonać siły zewnętrzne, aby przenieść ładunek z nieskończoności do danego punktu pola

$$E_p = -q \int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Energia potencjalna ładunku punktowego q umieszczonego w polu ładunku Q (tor radialny więc $dl = dr$)

$$E_p = -q \int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{qQ}{r}$$



Q, q różnoimienne to $E_p < 0$

przy rozsuwaniu siły zew. wykonują pracę to E_p wzrasta

Potencjał pola elektrostatycznego

- Potencjał elektrostatyczny określamy jako energię potencjalną jednostkowego ładunku

$$V = \frac{E_p}{q}$$

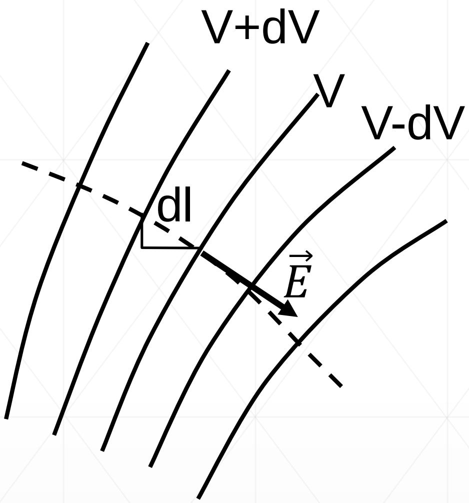
wolt [V = J/C]

- Potencjał elektrostatyczny jest to praca jaką należy wykonać aby przenieść jednostkowy ładunek z nieskończoności na odległość r od danego ładunku Q

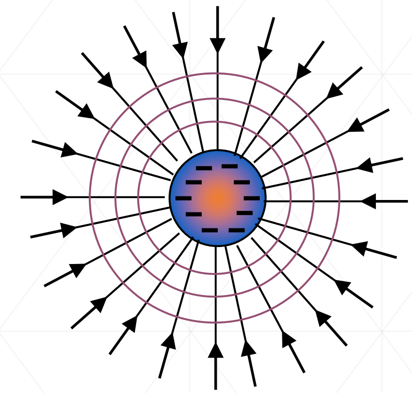
$$V = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

Różnica potencjałów – napięcie elektryczne



$$U = \Delta V = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V \qquad \vec{E} = -\nabla V$$

$$\overrightarrow{grad}\, V = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right)$$

powierzchnie ekwipotencjalne – stały potencjał

$V = \text{const} \;\Rightarrow \Delta V = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$ czyli $\vec{E} \perp d\vec{r}$

powierzchnie ekwipotencjalne są prostopadłe do linii sił pola

Równanie Poissona

- Korzystając ze związku natężenia pola z potencjałem

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right)$$

dywergencja pola wynosi:

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^2}{\partial y^2} + \frac{\partial V^2}{\partial z^2}\right)$$

- równanie Gaussa $div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$ przechodzi w tzw. równanie Poissona

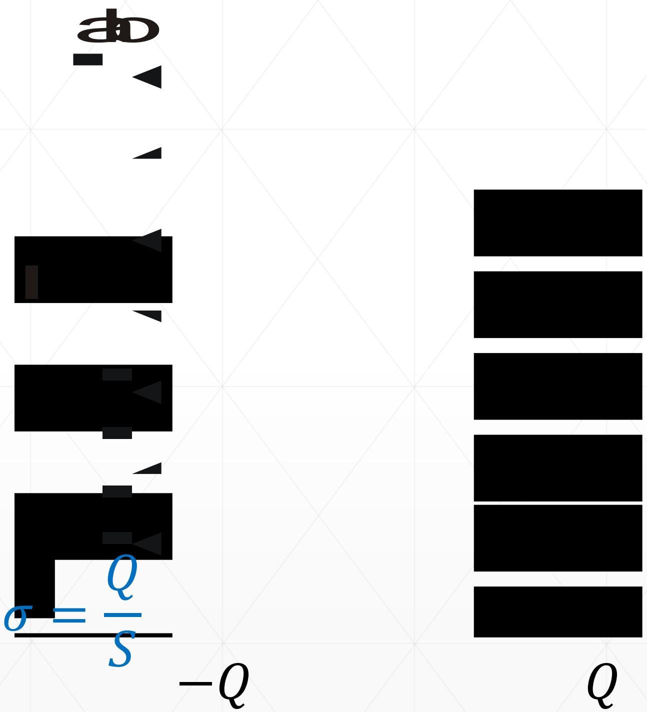
$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

ΔV - nazywa się laplasjanem potencjału

- Równanie to opisuje związek potencjału V z gęstością objętościową ładunku ρ i umożliwia znajdowanie potencjału, gdy znana jest funkcja i podane warunki brzegowe na brzegach obszaru w którym szukamy potencjału.

Kondensator płaski

Wyznaczmy natężenie pola elektrostatycznego dla kondensatora płaskiego o powierzchni okładek S naładowanego ładunkiem Q



$$E_I = E_{aI} + E_{bI} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = 0$$

$$E_{III} = E_{aIII} + E_{bIII} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = 0$$

$$E_{II} = E_{aII} + E_{bII} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_o} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_o}$$

$$E_{II} = -\frac{Q}{\varepsilon_o S}$$

Pojemność elektryczna

Stosunek nagromadzonego ładunku do potencjału dla danego przewodnika jest stały i nazywa się pojemnością elektryczną

$$C = \frac{Q}{V} \qquad 1\mathrm{F} = \frac{1\mathrm{C}}{1\mathrm{V}}$$

Pojemność zależy od rozmiarów i kształtu przewodnika oraz od otaczających go innych przewodników

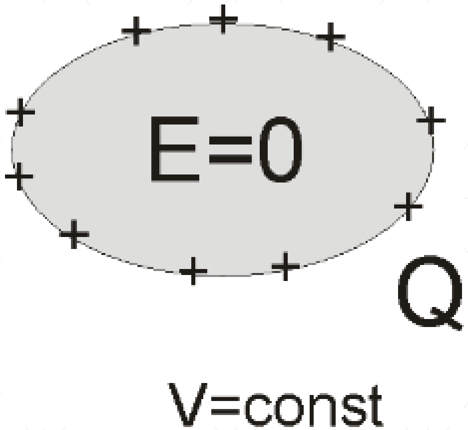
Układ dwóch przewodników różnoimiennie naładowanych tak położonych aby pole było ograniczone do obszaru pomiędzy nimi nazywamy kondensatorem i jego pojemność wynosi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{U}$$

Dla kondensatora płaskiego o powierzchni S i odległości okładek x

$$U = \Delta V = -E\,x = \frac{Q}{\varepsilon_o S}\,x \quad \text{czyli} \quad C = \frac{\varepsilon_0\,S}{x}$$

Pojemność elektryczna odosobnionego przewodnika



Kawałek metalu został pozbawiony części elektronów. W równowadze pole wewnątrz przewodnika zeruje się. Ładunek dodatni może się jedynie gromadzić na powierzchni. Potencjał *V* też musi być stały i jednakowy w całym przewodniku

Potencjał *V* jest proporcjonalny do zgromadzonego ładunku *Q*

$$V = \frac{1}{C}Q, \qquad C = \frac{Q}{V}$$

C pojemność elektryczna – stosunek ładunku zgromadzonego na przewodniku do jego potencjału

Aby zgromadzić ładunek Q na powierzchni metalu trzeba wykonać pracę równą energii potencjalnej zgromadzonego ładunku:

$$E_p = W = \int_0^Q V(Q)dQ = \int_0^Q \frac{Q}{C}dQ = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV$$

Energia układu ładunków

- Wróćmy do ostatniej zależności: $E_p = \frac{1}{2} QV$
- Jeżeli występuje rozkład ładunku o gęstości objętościowej ρ to

$E_p = \frac{1}{2}\int \rho V d\tau$; ale $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$; więc $E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\int \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) V d\tau$

gdzie $d\tau$ to element objętości

- Całkujemy przez części po całej przestrzeni, powierzchniowa całka znika dla bardzo dużych odległości

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[-\int \vec{E} \cdot (\nabla V) d\tau + \oint V \vec{E} \cdot d\vec{S}\right]$, co ostatecznie wynosi

$E_p = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{cała\ przestrzeń} E^2\, d\tau$ lub $\mathrm{d}E_p = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 d\tau$

- Gęstość energii u pola elektrycznego jest proporcjonalna do kwadratu natężenia tego pola

$$u = \frac{\mathrm{d}E_p}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2$$