
15 2 2005

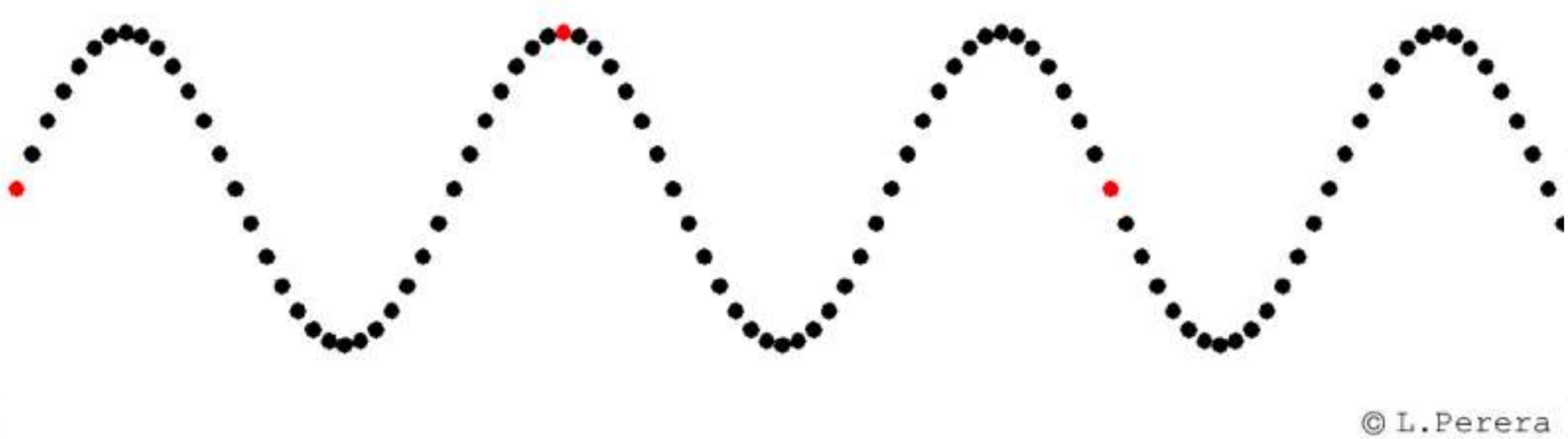
8. Fale

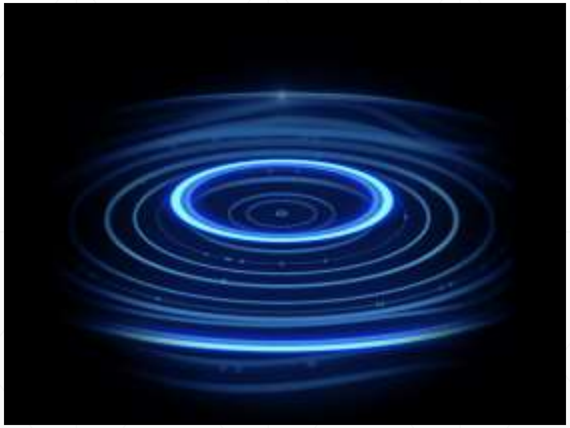
- fale biegnące,
- równanie fali,
- przenoszenie energii przez fale,
- fale stojące,
- paczka falowa,
- prędkość grupowa a prędkość fazowa,
- dyspersja,
- fale akustyczne.

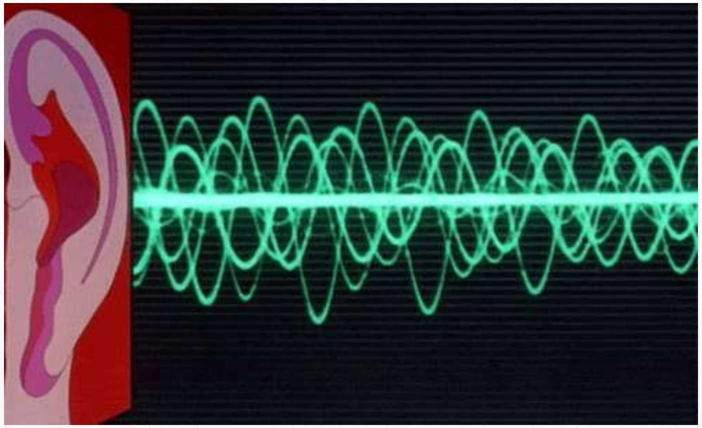
Podstawowe definicje

- **fala** – zaburzenie rozchodzące się w ośrodku lub w przestrzeni któremu towarzyszy przenoszenie energii bez przenoszenia masy
- **rodzaje fal**:
  - fale mechaniczne
  - fale elektromagnetyczne
  - fale materii
- **fale harmoniczne** – jeżeli zaburzenie z nią związane jest drganiem harmonicznym
- **fala biegnąca** – to fala, w której punkty o jednakowej fazie (np. grzbiety i doliny) przemieszczają się
- **fala stojąca** – to fala, w której punkty o jednakowej fazie (np. grzbiety i doliny) nie przemieszczają się, czyli są to drgania ośrodka zwane drganiami normalnymi

Przykłady fal

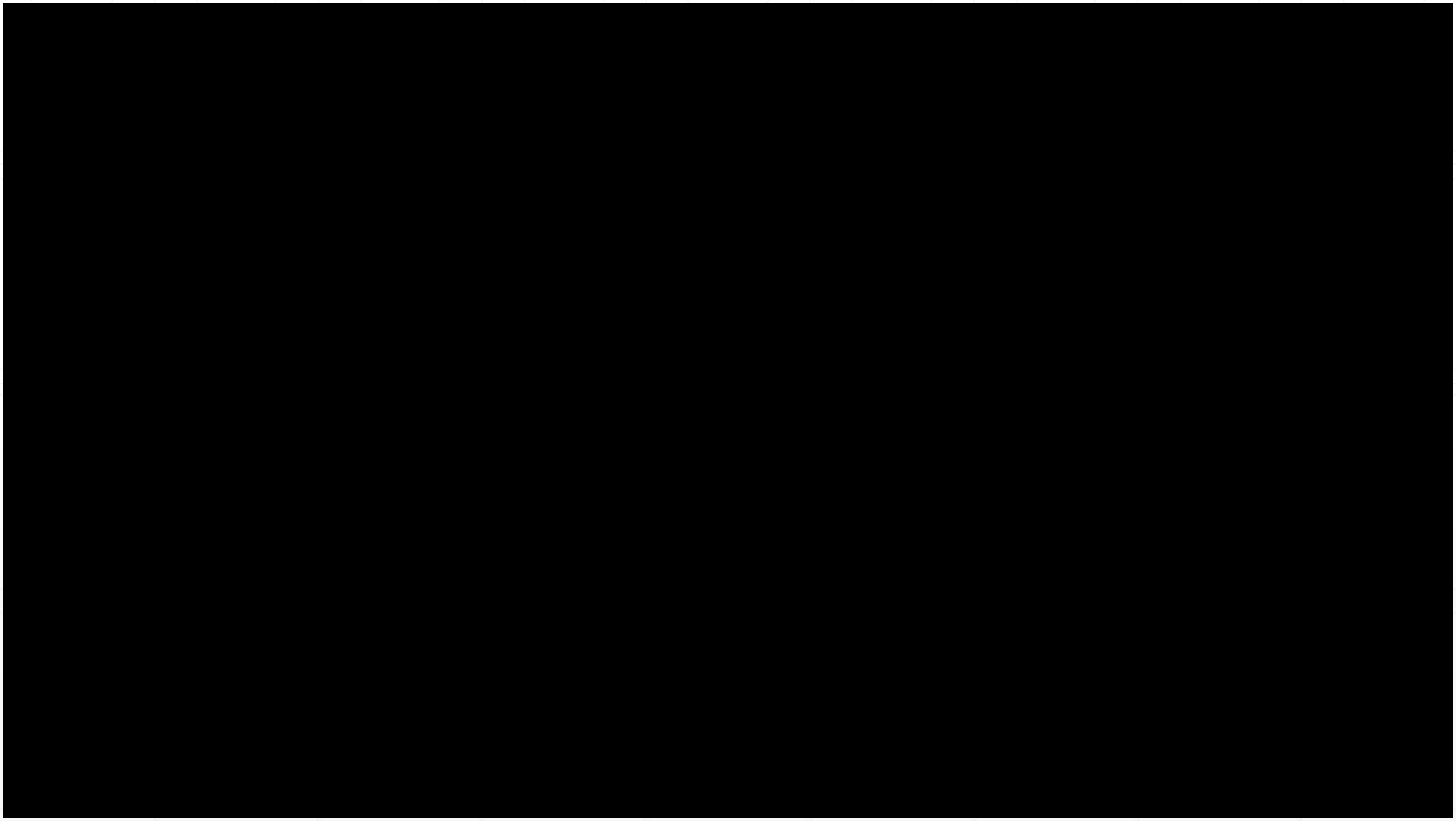






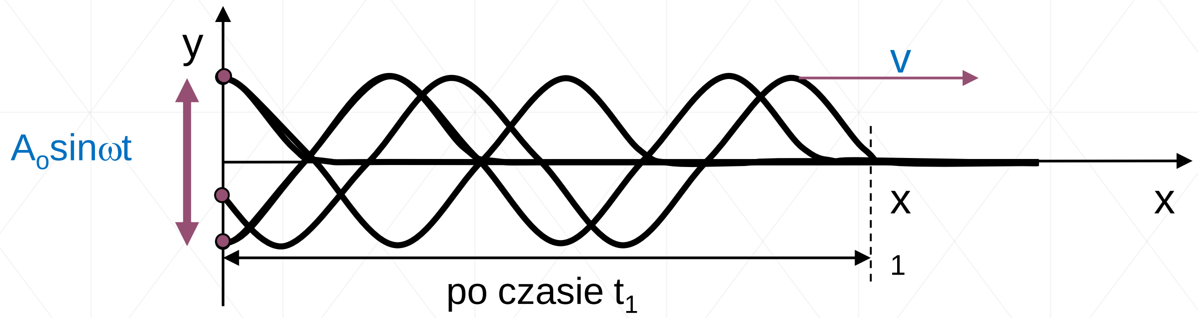
Równanie fali

Rozpatrzmy napiętą linę której jeden koniec drga ruchem harmonicznym, a zaburzenie rozchodzące się z prędkością v wzdłuż osi x



Równanie fali

Rozpatrzmy napiętą linę której jeden koniec drga ruchem harmonicznym, a zaburzenie rozchodzące się z prędkością v wzdłuż osi x



w punkcie początkowym $x = 0$ w punkcie x_1 zaburzenie pojawi się po $t_1 = \frac{x_1}{v}$

$$y(0,t) = A_o \sin(\omega t) \qquad y(x_1,t) = A_o \sin\omega\,(t - t_1)$$

w dowolnym punkcie x: $y(x,t) = A_o \sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A_o \sin(\omega t - kx)$

gdzie $k = \omega/v$ nazywamy liczbą falową

$y(x,t) = A_o \sin(\omega t - kx + \phi)$ – równanie fali z fazą początkową ϕ

Wielkości charakteryzujące fale

częstość kołowa

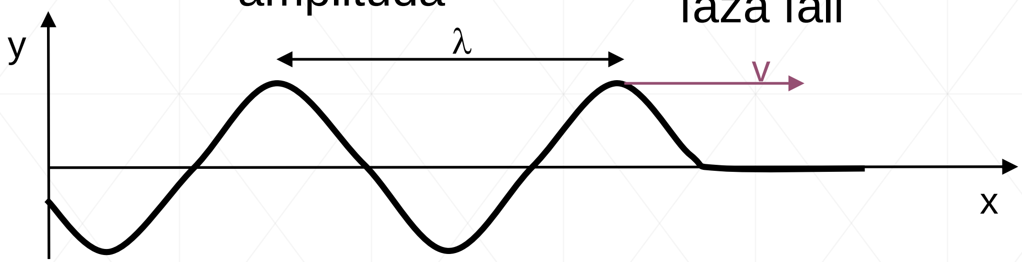
liczba falowa

przemieszczenie

$$y(x,t) = A_o \sin(\underbrace{\omega t - kx}_{\text{faza fali}})$$

położenie

amplituda



ponieważ $k = \omega/v$ *to* $k = 2\pi/v \cdot T$ *ale* $\lambda = v \cdot T$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ liczba falowa

wielkość λ jest o okresem przestrzennym zwanym długością fali

$y(x,t) = A_o \sin(\omega t - kx)$	propagacja w kierunku +x
$y(x,t) = A_o \sin(\omega t + kx)$	kierunku -x

$\omega t - kx = const$ stałość fazy

$$\omega - k \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \qquad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

stąd *k* nazywa się też wektorem falowym

prędkość fazowa – prędkość przemieszczania się fazy

Równanie różniczkowe fali płaskiej

$$y(x,t) = A_o \sin(\omega t - kx)$$

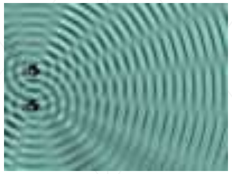
$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -A_o \omega^2 \sin(\omega t - kx) \qquad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -A_o k^2 \sin(\omega t - kx)$$

$$\textit{ponieważ} \quad k = \omega / v \qquad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -A_o \frac{\omega^2}{v^2} \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

różniczkowa postać równania fali płaskiej

Właściwości fal



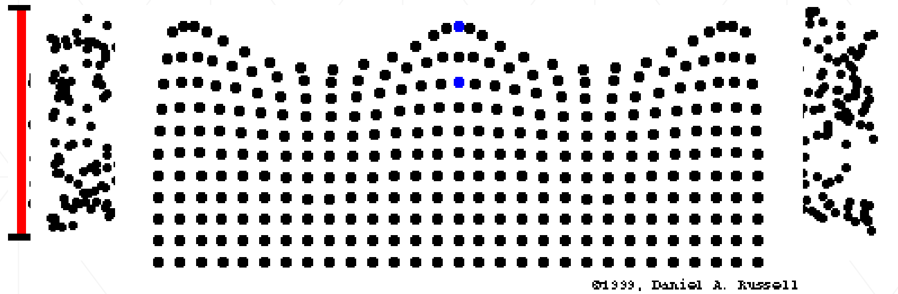
- fale harmoniczne opisane funkcją sinus lub cosinus
- dowolny ruch falowy można przedstawić jako superpozycję fal harmonicznych – analiza Fouriera
- powierzchnia falowa (czoło fali) – zbiór punktów o takiej samej fazie
- linie prostopadłe do powierzchni falowej to promień fali, wskazują kierunek propagacji
- fale harmoniczną można przedstawić również w zapisie zespolonym:

$$\Psi(x,t) = A_o e^{i(\omega t - kx)} = A_o e^{i\omega t} e^{-ikx}$$

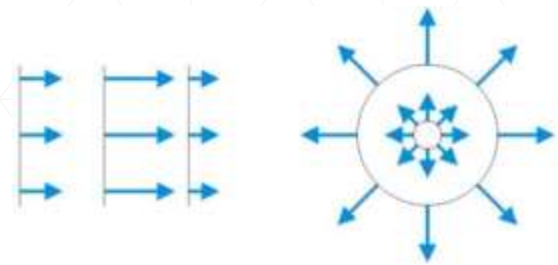
sens fizyczny ma tylko część rzeczywista zespolonej funkcji falowej

Zasada superpozycji: jeśli w ośrodku propagują się dwie fale, to wypadkowe zaburzenie ośrodka jest równe sumie zaburzeń wywołanych przez poszczególne fale

Rodzaje fal



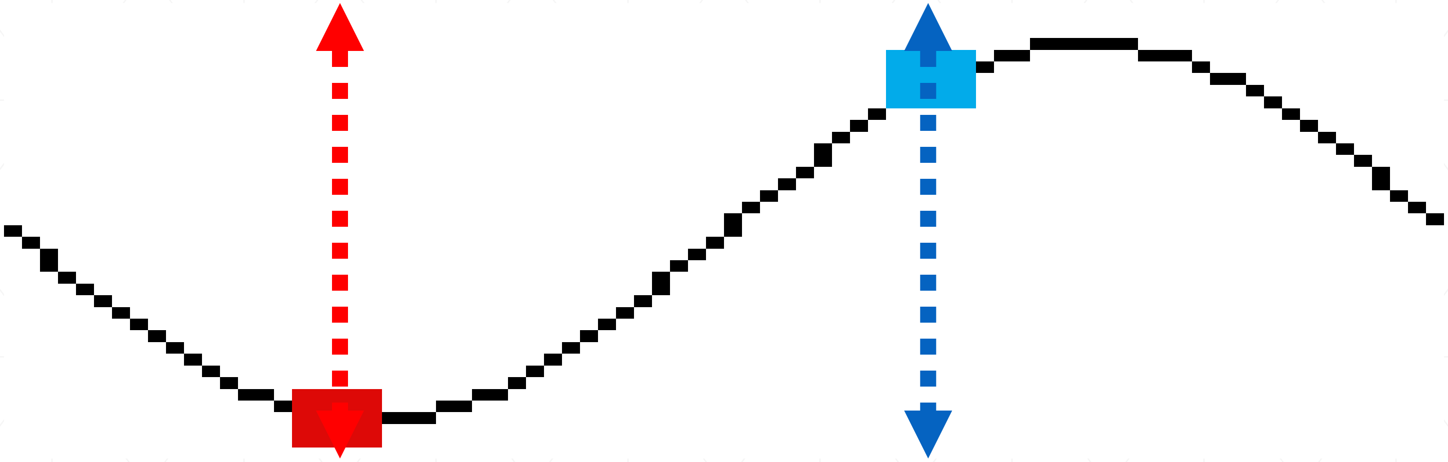
- w zależności od kształtu czoła fali:
  - płaskie
  - walcowe (koliste)
  - kuliste



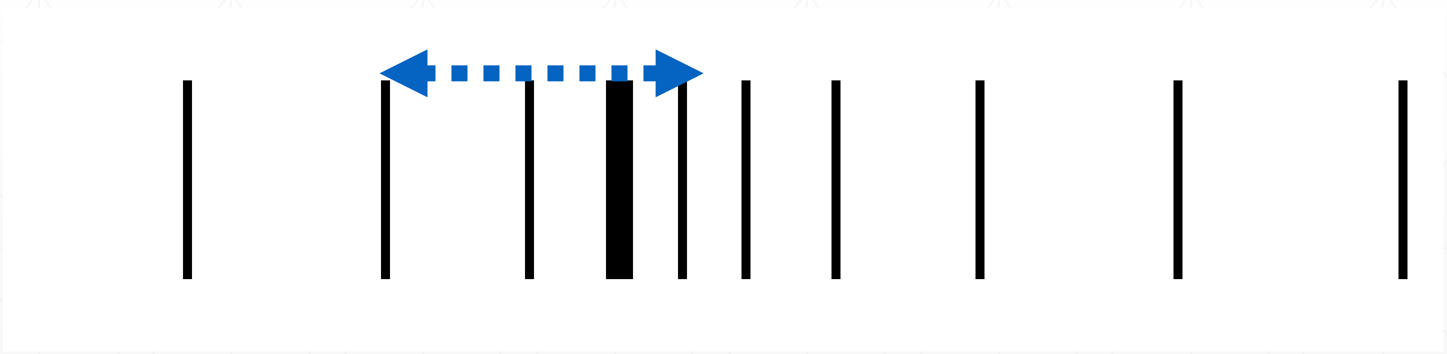
Fala płaska   Fala kulista

- w zależności od zmiennej wielkości fizycznej:
  - skalarne (np. fale ciśnienia)
  - wektorowe (np. elektromagnetyczne)
    - podłużne
    - poprzeczne, tylko w ośrodkach sprężystych
    - powierzchniowe

mogą być spolaryzowane



Fala poprzeczna

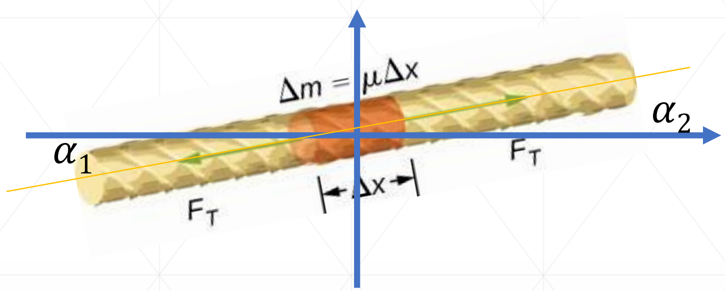


Fala podłużna

Przykład – fala w naprężonej linie

Lina o gęstości liniowej μ napięta naprężeniem F_T wykonuje drgania poprzeczne. Siła wypadkowa działająca na element struny w kierunku pionowym jest równa:

$$F_{wyp} = F_T \sin\alpha_1 - F_T \sin\alpha_2 = \Delta m\, a = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$



Dla małych kątów: $\sin\alpha = \alpha = \dfrac{\partial y}{\partial x}$

$$F_T \Delta\alpha = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

porównując z równaniem falowym $\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ otrzymujemy: $v = \sqrt{F_T/\mu}$

Prędkość fazowa zależy od parametru sprężystości ośrodka F_T (naprężenia liny) oraz parametru bezwładności μ (gęstości liniowej)

Energia przenoszona przez fale

Uśredniona w czasie moc sinusoidalnej fali mechanicznej, przez którą należy rozumieć średnią szybkość przenoszenia energii przez falę wynosi:

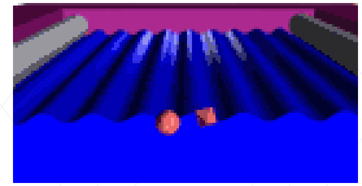
$$\langle P \rangle = \frac{T\omega^2}{2v} A_o^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A_o^2 v$$

uśredniona w czasie moc fali sinusoidalnej jest wprost proporcjonalna do **kwadratu amplitudy** fali i do **kwadratu częstości kołowej** fali.

Przykłady przenoszenia energii przez fale:

- trzęsienia ziemi niszczą całe miasta,
- hałas uszkadza komórki nerwowe w uchu,
- fale wodne podmywają brzeg morza,
- ultradźwięki leczą nadwerężone mięśnie,
- wiązka laserowa niweluje komórki nowotworowe.

Fale stojące

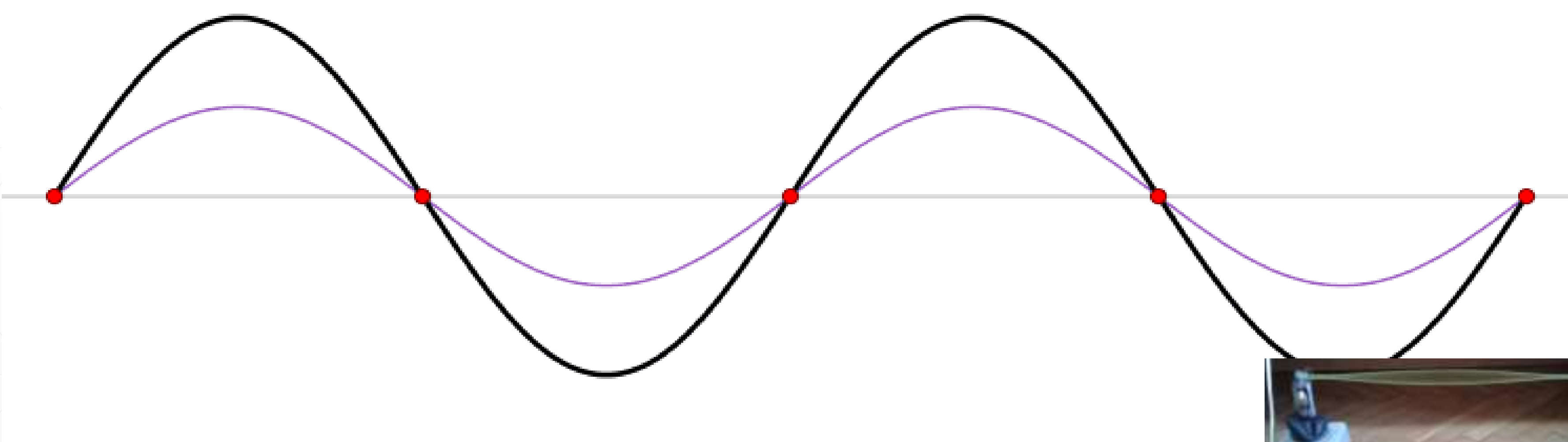


Fala stojąca powstaje przy nakładaniu się dwu harmonicznych fal biegnących w przeciwnych kierunkach z jednakowymi prędkościami i amplitudami

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

$$y_2 = A\cos(\omega t + kx)$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos k\,x \cdot \cos\omega\,t$$



$$\text{strzałka} - \; kx = \pm n\pi \quad (n = 0,1,2\ldots) \Rightarrow x = \pm n\frac{\lambda}{2} \rightarrow A_{st} = 2A$$

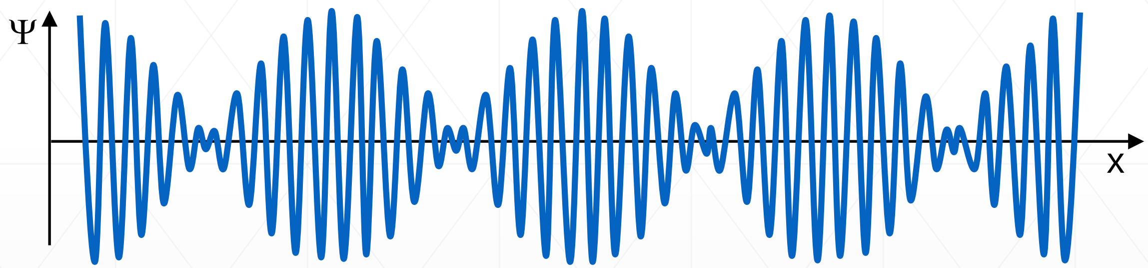
$$\text{węzeł} - kx = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0,1,2\ldots) \Rightarrow x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \rightarrow \; A_{st} = 0$$

Superpozycja fal harmonicznych - prędkość grupowa

Rozważmy dwie fale harmoniczne o nieco różnych częstościach $d\omega << \omega$

$y_1 = A_o \sin\big((\omega + d\omega)t - (k + dk)x\big)$ $\qquad$ $y_2 = A_o \sin\big((\omega - d\omega)t - (k - dk)x\big)$

$$y = y_1 + y_2 = 2A_o \cos(d\omega \cdot t - dk \cdot x) \cdot \sin(\omega t - kx)$$



w wyniku superpozycji dwóch fal otrzymaliśmy fale harmoniczną o częstości nośnej ω i modulowanej amplitudzie przenoszonej z prędkością grupową v_g

$$d\omega \cdot t - dk \cdot x = const$$

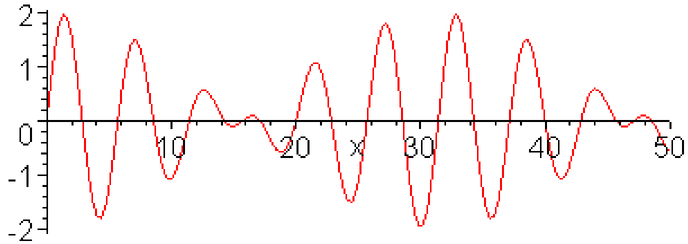
$$d\omega \cdot dt - dk \cdot dx = 0$$

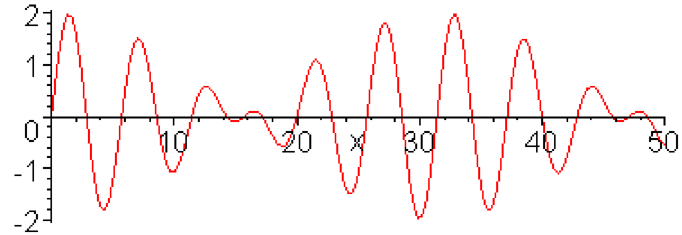
$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

- prędkość grupowa

Dyspersja fal

szukamy związku pomiędzy prędkością grupową a fazową





$$v = \frac{\omega}{k} \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dkv}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} \qquad dk = d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$$

$$v_g = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

prędkością grupową różni się od fazowej, gdy prędkość fazowa zależy od częstości (długości fali). Zależność v od λ nazywamy dyspersją.

ośrodki dyspersyjne – ($v \neq v_g$) fale o różnej długości rozchodzą się z różną prędkością, np. pryzmat dla światła

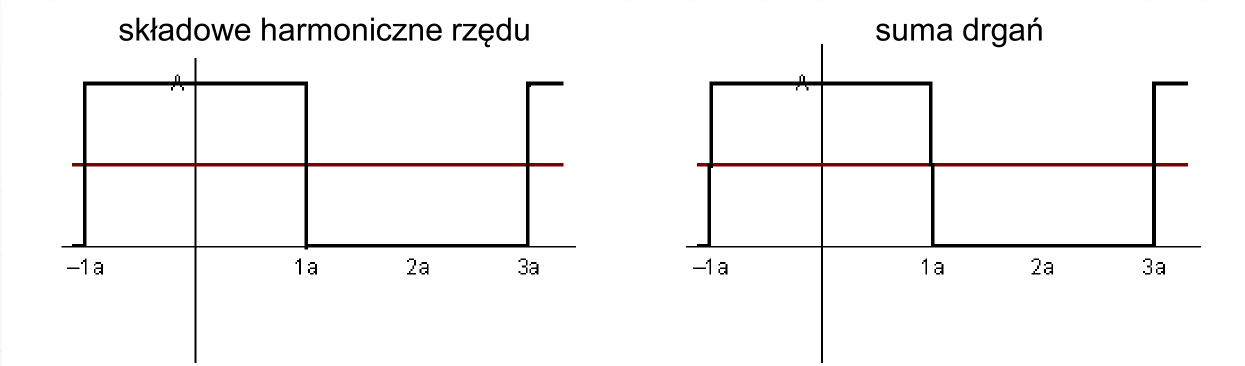
ośrodki niedyspersyjne – ($v = v_g$) fale o różnej długości rozchodzą się z taką samą prędkością, np. śiatło w próżni

Analiza drgań Fouriera

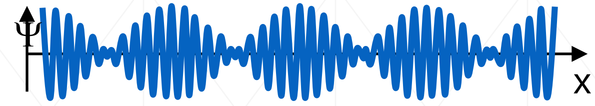
$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\,\omega t + b_n \cos n\,\omega t)$$

Każde drganie okresowe nieharmoniczne można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego zwanego szeregiem Fouriera, czyli w postaci sumy *n* drgań harmonicznych

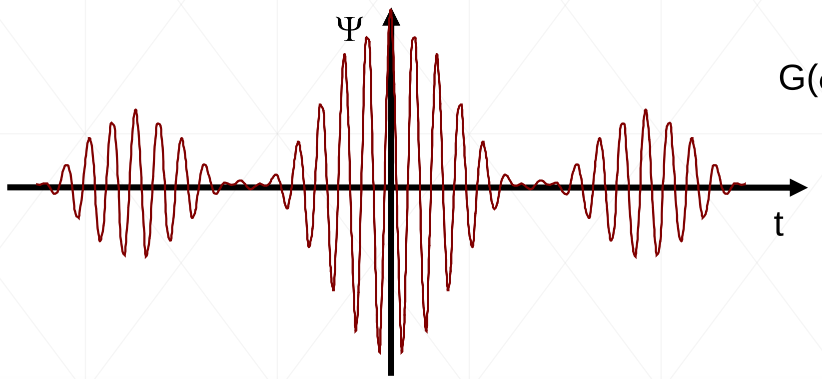
$$y = \frac{A}{2} + \frac{2A\cos\omega\,t}{\pi} - \frac{2A\cos 3\,\omega t}{3\pi} + \frac{2A\cos 5\,\omega t}{5\pi} - \frac{2A\cos 7\,\omega t}{7\pi}$$

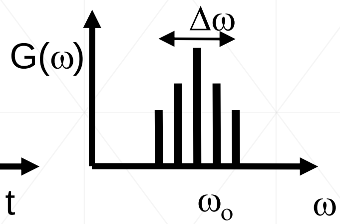


Superpozycja Fouriera



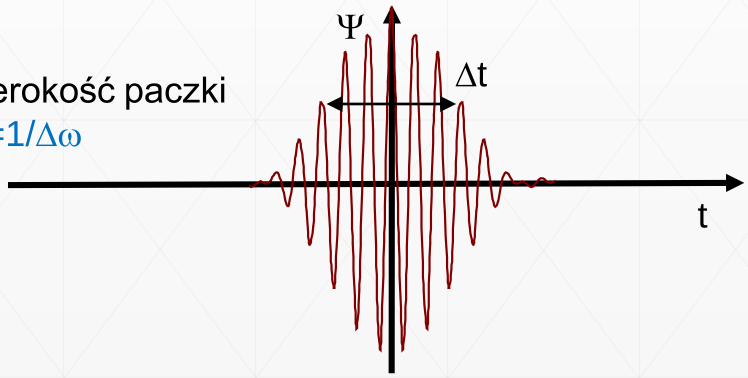
Korzystając z szeregu Fouriera dodając większą liczbę fal o częstościach bliskich ω_o uzyskuje się stłumienie bocznych dudnień. Poniżej wykres dla sumy 5 fal.

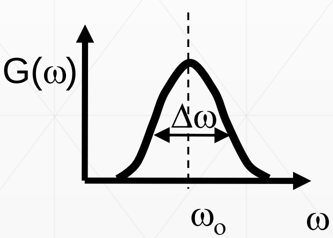




Przy sumowaniu nieskończonej liczby fal o częstościach bliskich ω_o i amplitudach opisanych funkcją Gaussa otrzymujemy pojedynczą tzw. paczkę falową.

szerokość paczki
$\Delta t = 1/\Delta\omega$





$$y(t) = \int_0^\infty G(\omega)\cos\omega t\, d\omega$$

Paczka falowa

W praktyce posługujemy się skończonymi ciągami falowymi tzw. paczkami falowymi, które to mają następujące cechy:

1. paczka falowa powstaje w wyniku superpozycji fal harmonicznych o częstościach z przedziału $\Delta\omega$ i amplitudach opisanych funkcją Gaussa

2. im mniejsze $\Delta\omega$ tym bardziej paczka falowa rozmyta jest w czasie

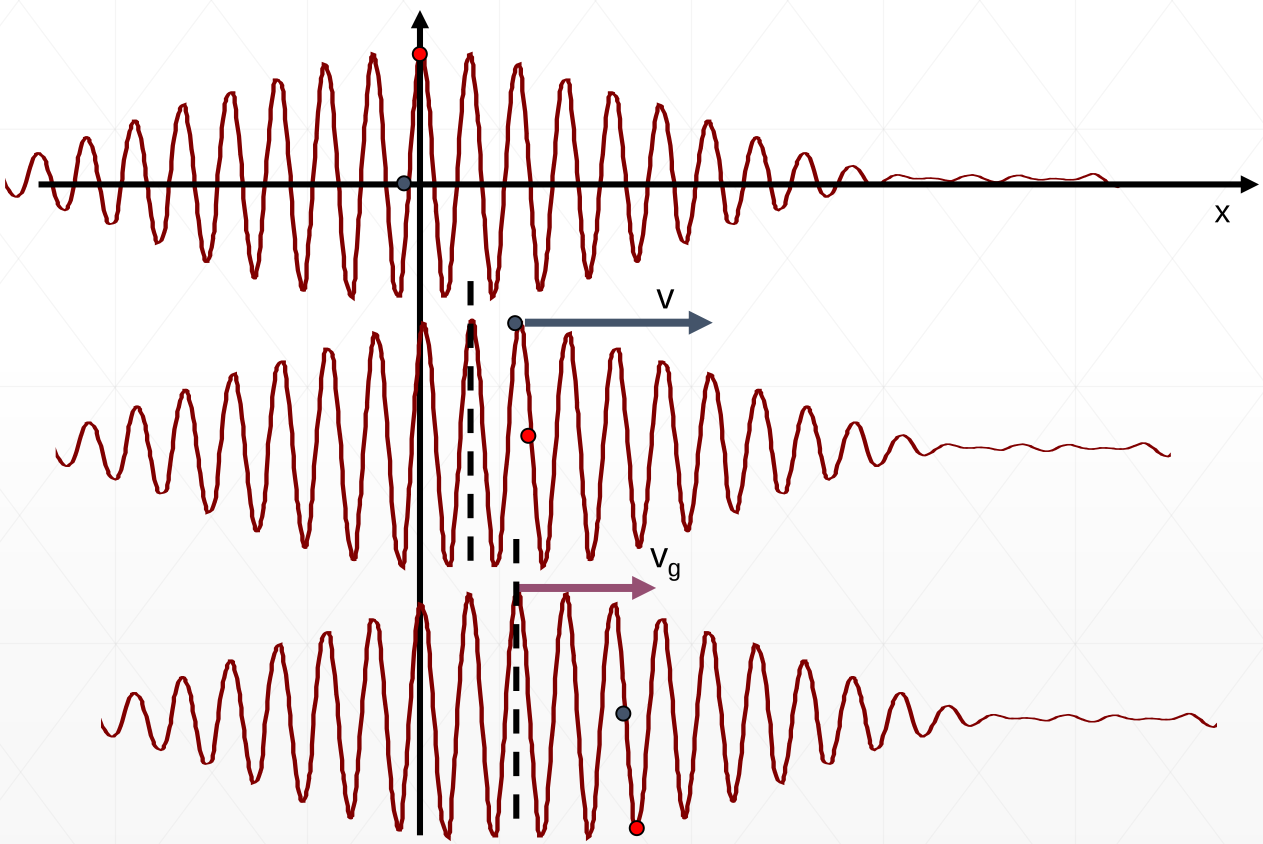
3. paczka falowa rozchodzi się z prędkością grupową

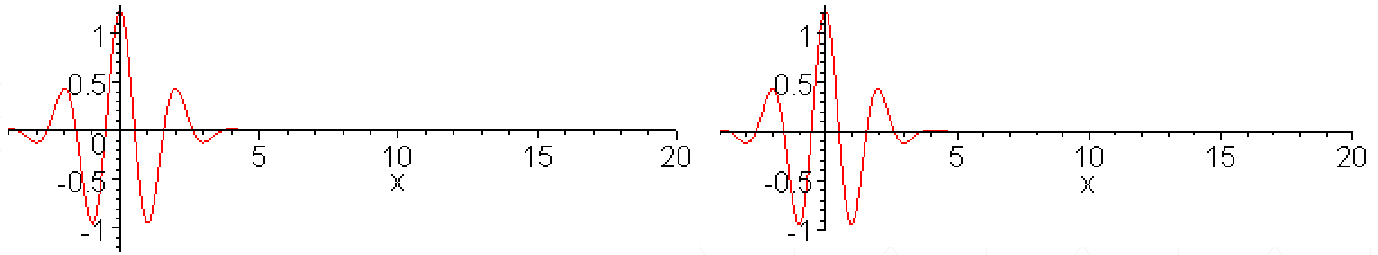
4. danej paczce falowej można przyporządkować odpowiednie pasmo liczb falowych Δk (tak jak pojedynczej fali liczbę falową k)

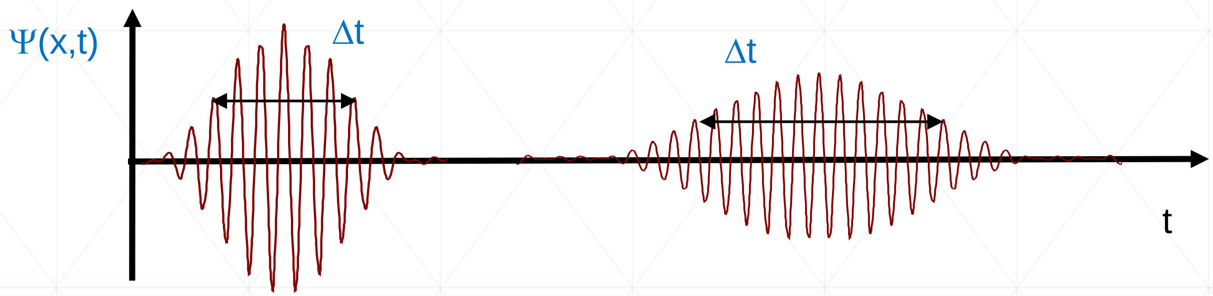
$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)\Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g} = \frac{1}{v_g \cdot \Delta t} = \frac{1}{\Delta x}$$

5. w paczce falowej zachodzi zależność pomiędzy prędkością fazową oraz prędkością grupową

Prędkość grupowa, a prędkość fazowa paczki falowej







$\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$

$\Delta k \cdot \Delta x > 1$

w ośrodku dyspersyjnym paczka falowa ulega deformacji (rozmyciu), gdyż poszczególne składowe propagują się z różnymi prędkościami

w ośrodku niedyspersyjnym paczka falowa nie ulega rozmyciu

Fale i cząstki

- **cząstki** – obiekty materialne, które poruszają się z jednego punktu do drugiego niosąc ze sobą informację i energię
- **fale** – informacja i energia przemieszczają się z jednego punktu do drugiego, mimo że żaden obiekt materialny nie przemieszcza się

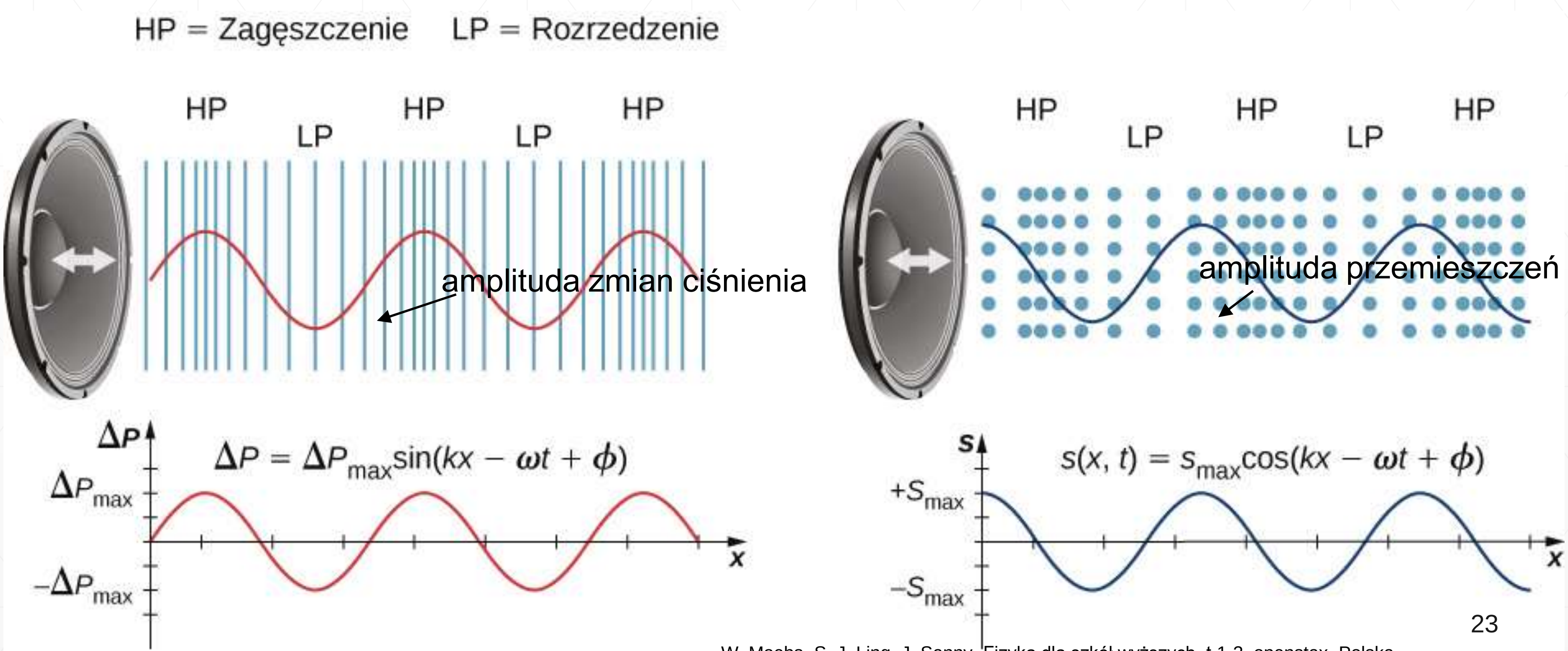
„Często zdarza się, że fala ucieka z miejsca powstania, podczas gdy woda pozostaje, podobnie jest z falami, jakie wiatr wywołuje na polu zboża - widzimy fale biegnącą przez pole, podczas gdy zboże pozostaje w miejscu”

Leonardo da Vinci

Fale dźwiękowe

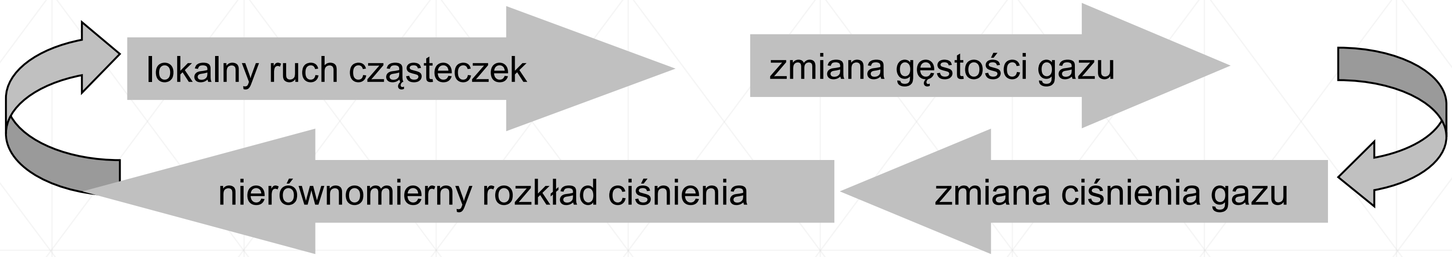
Dźwięk jest przykładem fali mechanicznej, drganiem cząstek (np. cząsteczek powietrza), które można odczuć jako zmiany ciśnienia.

Fale dźwiękowe w powietrzu są przykładem fal podłużnych polegających na rozchodzeniu się zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza



W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1-3, openstax, Polska, 2018

Modele opisujące dźwięk



Dźwięk może być opisywany jako zmiany ciśnienia powietrza wokół wartości średniej:

$$\Delta p(x,t) = \Delta p_{max} \sin(\omega t - kx)$$

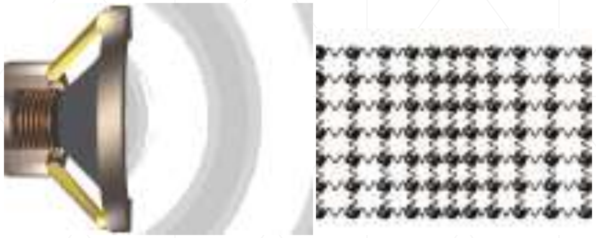
Fale dźwiękowe mogą być modelowane za pomocą drgających cząsteczek powietrza:

$$s(x,t) = s_{max} \cos(\omega t - kx)$$

Związek pomiędzy ciśnieniem a wychyleniem określa zależność:

$$\Delta p_{max} = (v\rho\omega) s_{max}$$

Prędkość dźwięku



- prędkość dźwięku zależy od sprężystości i bezwładności ośrodka,

$$v = \sqrt{sprężystość/bezwładność}$$

- prędkość dźwięku:
  - w strunie $v = \sqrt{F_T/\mu}$
  - w cieczy $v = \sqrt{\beta/\rho}$
  - w ciele stałym $v = \sqrt{B/\rho}$
  - w gazach $v = \sqrt{\gamma p_0/\rho}$

F_T – naprężenie struny
μ – gęstość liniowa masy
β – współczynnik sprężystości
B - moduł ściśliwości
ρ - gęstość ośrodka
γ - stała przemiany adiabatycznej

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$$

- powietrze 340 m/s, woda 1500 m/s, stal 6000 m/s

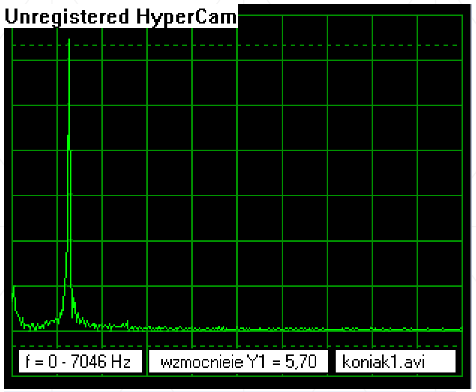
Fale dźwiękowe (akustyczne)

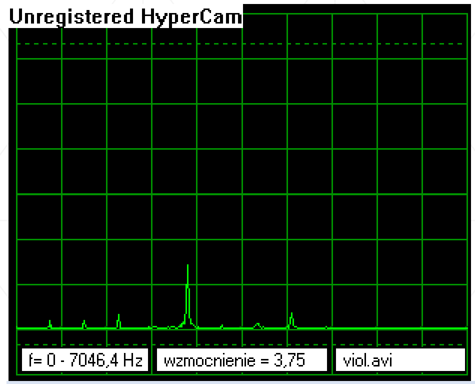
- dźwięki to podłużne fale sprężyste rozchodzące się w ciałach stałych, cieczach i gazach o częstotliwościach
  (infradźwięki) ← od 20 Hz do 20 kHz → (ultradźwięki),

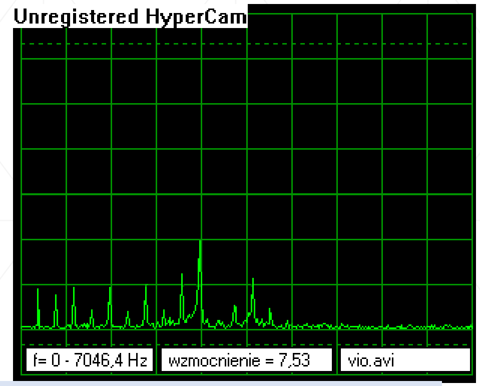
- ton – fala harmoniczna o określonej częstotliwości,
  wysokość dźwięku – jego częstotliwość, ton podstawowy i wyższe harmoniczne,
  natężenie – moc na jednostkę powierzchni, ~ A^2 i ω^2 (głośność)
  barwa dźwięku – zbiór fal o różnych częstotliwościach, zależy od rodzaju i natężenia tonów składowych (widmo harmoniczne),

- głośność - poziom natężenia dźwięku $10\log(I/I_o)$ [dB]
  gdzie $I_o = 10^{-12}$ W/m^2 to natężenie odniesienia - dolna granica słyszalności (0 dB) (10 dB szelest liści, 60 dB normalna rozmowa, 120 dB granica bólu)

Widmo harmoniczne dźwięków

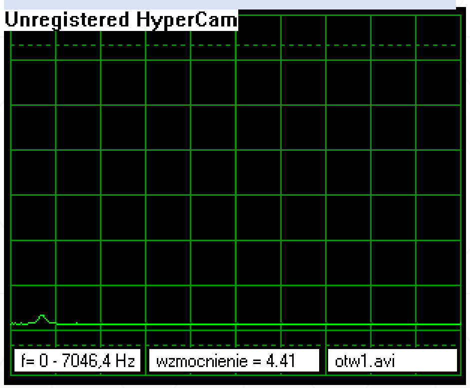


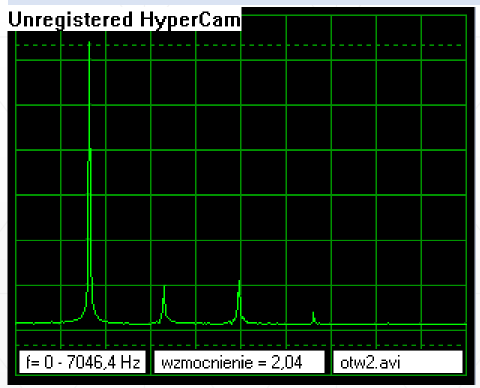


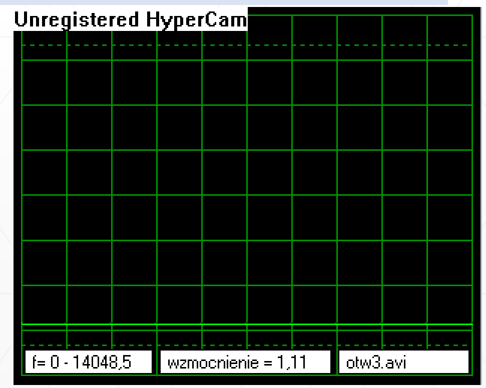


widmo kieliszka ω=900 Hz

dobre skrzypce – bogaty bukiet harmoniczny, zły gracz



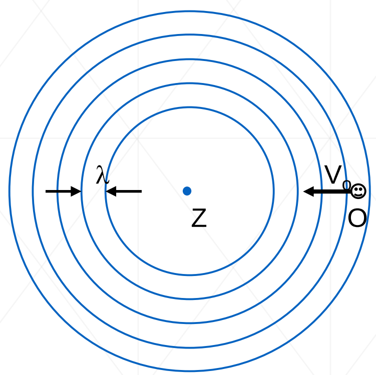




widmo fletu przy słabym zadęciu, silniejszym i najsilniejszym: wzrost najniższej częstotliwości od 587Hz, 1175Hz do 1765Hz ale dominuje nieharmoniczna 2720Hz;

Zjawisko Dopplera – zmiana częstości wynikająca z wzajemnego ruchu obserwatora O i źródła Z

Nieruchome źródło



v – prędkość dźwięku
v_o – prędkość obserwatora

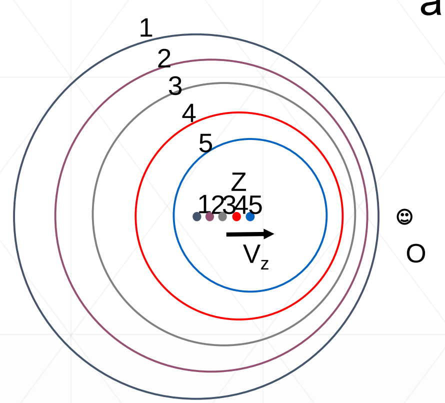
zbliżający się obserwator odbiera fale o większej częstotliwości

$$f' = \underbrace{\left(\frac{vt}{\lambda} + \frac{v_o t}{\lambda}\right)}_{\text{liczba rejestrowanych fal w czasie t}} \frac{1}{t} = \frac{v + v_o}{\lambda} = \frac{(v + v_o) f}{v} = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)$$

liczba rejestrowanych fal w czasie t

Nieruchomy obserwator

v_z – prędkość źródła



źródło zbliża się do obserwatora fala ma mniejszą długość z przodu, a większą z tyłu

$$\lambda' = \frac{v}{f} - \frac{v_z}{f}$$

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{vf}{v - v_z} = f\frac{1}{1 - (v_z/v)}$$

gdy prędkość źródła większa jest od prędkości dźwięku powstaje fala uderzeniowa

liczba Macha $M = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{v_z}{v}$