6. Pola zachowawcze na przykładzie pola grawitacyjnego

- pola siłowe,
- potencjał,
- energia potencjalna,
- pole grawitacyjne,
- I i II prędkość kosmiczna,
- prawa Keplera.

Pola siłowe i ich rodzaje

Ponad 100-letnie prace pozwalają na stwierdzenia, iż wszystkie spotykane oddziaływania siłowe można sprowadzić do 4 oddziaływań fundamentalnych:

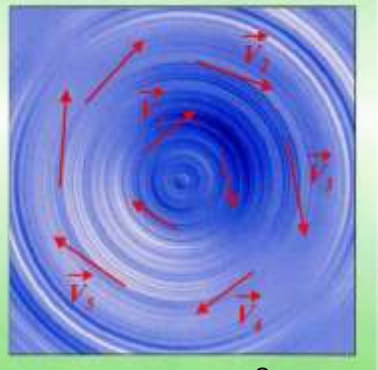
- *Oddziaływanie grawitacyjne*,
- *Oddziaływanie elektromagnetyczne*,
- *Słabe oddziaływanie jądrowe*,
- *Silne oddziaływanie jądrowe*

I cecha - na poziomie mikroskopowym każda z sił ma swoją cząstkę, wyobrażaną jako maleńka porcja siły: **grawiton**, **foton**, **słabe mezony pośredniczące, gluon**. Do 1984 potwierdzono ich istnienie oraz ściśle określono ich właściwości, przy czym kwestia eksperymentalnego potwierdzenia istnienia grawitonu to odkrycie fal grawitacyjnych za pomocą instalacji LIGO w USA (luty 2016 r. + Nobel Prize).
II cecha - pewna ilość "ładunku" w którą jest wyposażona cząstka decyduje o tym jaki wpływ wywiera na nią dane oddziaływanie; **grawitacja - masa**, **elektromagnetyczne - ładunek elektryczny**, **oddziaływanie silne/słabe - ilość ładunku "silnego"/"słabego".**

Polem (fizycznym) nazywamy obszar (2D lub 3D) w którym występuje dana wielkość fizyczna.

Jeśli w przestrzeni każdemu punktowi *x,y,z* przypisana jest funkcja wektorowa ***f***(x, y, z) to mamy do czynienia z ***polem wektorowym***.

Przykładem pola wektorowego jest pole prędkości ***v*** cząstek np. wody w rzece, czy pole siły grawitacji ***F***(***r***).



Pole prędkości w wirze wodnym. Wektor prędkości zmienia się w zależności od punktu w wirze i czasu.

W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

Podobnie, jeśli punktom *x,y,z* przypisana jest funkcję skalarną *f*(x, y, z) to mówimy o ***polu skalarnym***.

Przykładem pola skalarnego jest temperatura powietrza *T(x,y,z)* w różnych punktach przestrzeni

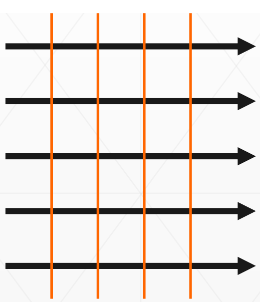
Stacjonarne ←→ Niestacjonarne

Zachowawcze (potencjalne)←→ Niezachowawcze

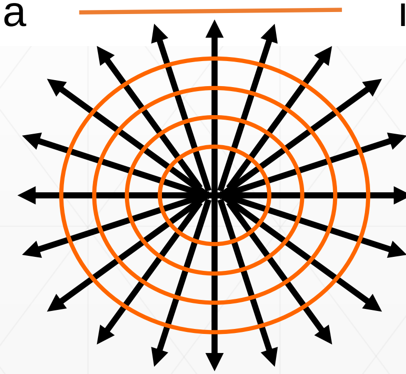
Linie sił pola – linie po których poruszają się hipotetyczne ładunki próbne umieszczone w danym polu.

Izopowierzchnie - powierzchnie stałych funkcji pola (sił, natężeń)

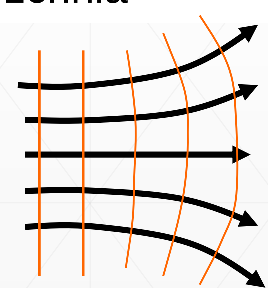
lina sił pola izopowierzchnia



pole jednorodne



pole centralne



pole niejednorodne

Pola centralne nazywamy pola w których charakterystyczne kierunki przechodzą przez środek (centrum) a wartości zależą od odległości.

Wielkości charakteryzujące pola siłowe

Siła oddziaływania – opisana za pomocą reguły zależność pomiędzy źródłem pola a obiektem próbnym umieszczonym w dowolnym punkcie pola.
Dla oddziaływań fundamentalnych występuje zależność od ilości „ładunku" wytwarzającego pole Q, „ładunku próbnego" q oraz pola mają **charakter centralny**; siła zależy od odległości do źródła pola r:

$$\boldsymbol{F}_{od} = f(Q, q, \boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

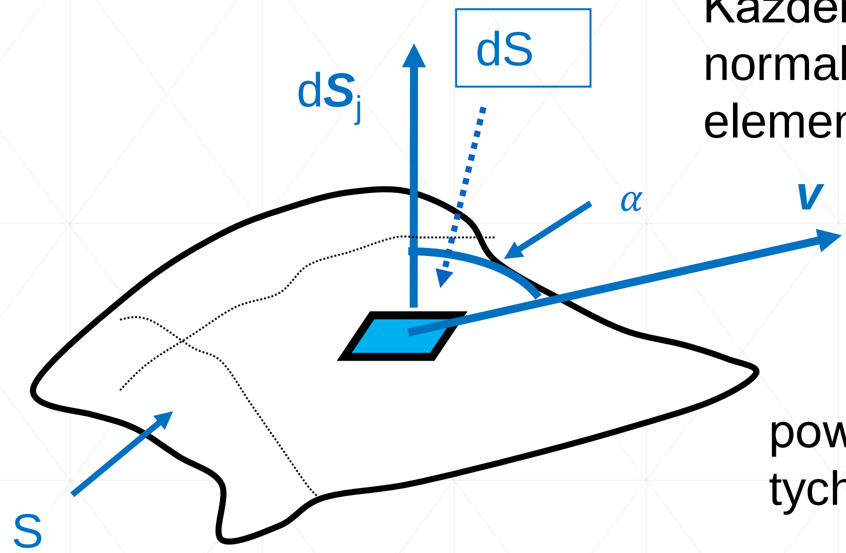
Zachodzi zasada superpozycji pól – dla danego punktu pola pole jest wypadkowym polem od poszczególnych źródeł:

$$\boldsymbol{F}_w = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i$$

Natężenie pola **–** znormalizowana wartość siły oddziaływania w danym punkcie pola:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{F}}{q} \equiv f(Q, \boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$$

Strumień pola **–** „ilość" linii sił przechodzących przez daną powierzchnię prostopadle do niej.

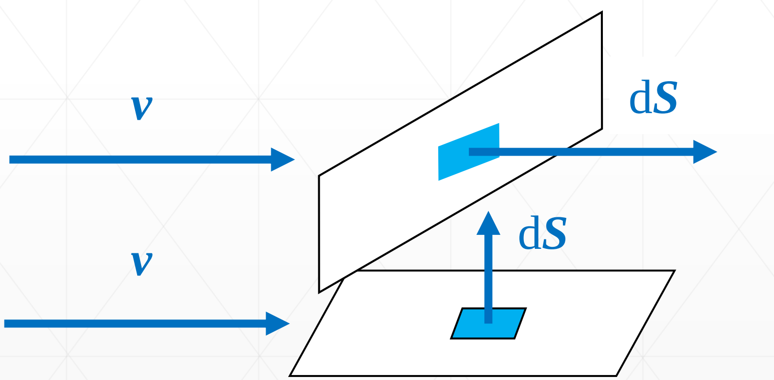


Każdemu elementowi dS przypisujemy wektor $d\boldsymbol{S}_j$ normalny do powierzchni i określający orientację elementu dS:

$$\left|d\vec{S}_j\right| = dS; \qquad \frac{d\vec{S}_j}{dS_j} = \vec{n}$$

Strumień $d\Phi$ wielkości wektorowej $\boldsymbol{v}$ przez powierzchnię $d\boldsymbol{S}$ jest równy iloczynowi skalarnemu tych dwu wektorów

$$d\Phi = \vec{v}\cdot d\vec{S} = v dS \cos\alpha$$

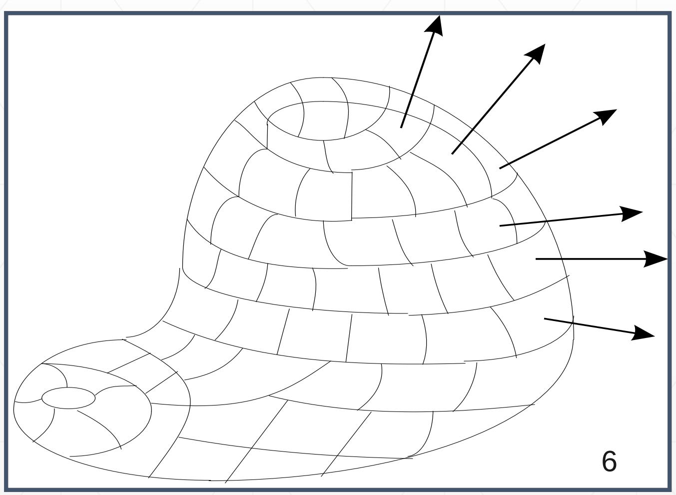


$d\Phi = v\, dS$

$d\Phi = 0$

Całkowity strumień przez powierzchnię S:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} d\Phi_i = \int_S \boldsymbol{v} d\boldsymbol{S}$$



Pola zachowawcze

Pole zachowawcze (pole sił zachowawczych, pole potencjalne) – takie pole sił, w którym praca wykonywana podczas przesuwania jakiegoś ciała nie zależy od toru, po którym porusza się ciało, a jedynie od jego położenia początkowego i końcowego.

Rodzaje energii:

kinetyczna E_k – związaną z ruchem ciała,
potencjalna E_P – związaną z siłami działającymi na ciało i jego położeniem.

Energia potencjalna pola **–** nagromadzona w danym punkcie pola zdolność do wykonywania pracy. Praca jak musi być wykonana by przenieść dany ładunek z nieskończoności do danego punktu pola.

$$E_{p_r} = W_{\infty \to r} = \int_{\infty}^{r} \boldsymbol{F}_{od} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Potencjał pola (dla pola zachowawczego) **–** energia potencjalna ”ładunku próbnego” w danym punkcie pola:

$$\phi(r) = \frac{E_{p_r}}{q} = \int_{\infty}^{r} \frac{\boldsymbol{F}_{od}}{q} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\infty}^{r} \boldsymbol{\gamma} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Praca w polu zachowawczym. Praca nad przeniesieniem jednostkowego ładunku pola przeciw siłom pola pomiędzy dwoma punktami A i B o potencjałach $\varphi(A)$ i $\varphi(B)$ jest równa:

$$W_{AB} = \int_{A}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{A}^{\infty} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{\infty}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = E_{P_B} - E_{P_A} = q[\phi(B) - \phi(A)] = -q \int_{A}^{B} \boldsymbol{\gamma} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Wprowadzenie potencjału ułatwia obliczanie natężenia pola, a więc sił działających na obiekty znajdujące się w tym polu. Istota polega na tym, że przy pomocy potencjału φ można obliczyć pole tak łatwo, jak łatwo można obliczyć pochodną.

Weźmy dwa punkty o współrzędnych (x, y, z) i ($x+dx, y, z$). Obliczmy pracę jaką trzeba wykonać, aby przenieść jednostkowy ładunek próbny ($q=1$) z jednego z tych punktów do drugiego:

$$\Delta W = -\int \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} = -\gamma_x dx \qquad \Delta W = \phi(x+dx, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

$$\gamma_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, oraz \quad \gamma_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}; \qquad \gamma_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{\gamma}(r) = -\left[\vec{i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\right] \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} = -grad\ \phi \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma} = -\nabla\phi$$

$$\text{oprator nabla } \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial\ x}, \frac{\partial}{\partial\ y}, \frac{\partial}{\partial\ z}\right) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial\ x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial\ y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial\ z}$$

Operator ten określamy tak, że w zapisie matematycznym jest symbolicznym wektorem o trzech składowych. W związku z czym <u>stosuje się do niego wszystkie reguły algebry wektorów, m.in. mnożenia.</u>

Taki operator (jak każdy operator) sam w sobie nie ma sensu, nabiera realnego sensu dopiero wtedy jeśli podziała na jakąś funkcję (skalarną i wektorową).
Należy przy tym pamiętać aby stawiać operator po lewej stronie obiektu na który ma działać.

Działając operatorem nabla na funkcję zmiennych położenia *x,y,z* (formalnie mnożąc funkcję przez wektor ∇) uzyskujemy trzy ważne i użyteczne funkcje.

$$\nabla f(x,y,z) - gradient\ funkcji\ skalarnej\ f$$
$$\nabla \bullet \boldsymbol{f}(x,y,z) - dywergencja\ funkcji\ wektorowej\ \vec{f}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{f}(x,y,z) - rotacja\ funkcji\ wektorowej\ \vec{f}$$

$$grad f(x,y,z) = \nabla f = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Wektor mnożony przez skalar jest nadal wektorem -> czyli ***grad f jest wektorem***

Własności:

1. Każda z pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ we wzorze na gradient mówi o tym jak szybko zmienia się funkcja *f* w danym kierunku, zaś wektor ***∇f*** jest wypadkową tych zmian i pokazuje kierunek, w którym funkcja zmienia się najsilniej.
2. Wektor ***∇f*** jest prostopadły do powierzchni ekwiskalarnej.

$$\nabla \bullet \boldsymbol{f}(x,y,z) \equiv div\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Jest to iloczyn skalarny funkcji wektorowej o składowych $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ z wektorem nabla o składowych ($\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$), zatem div ***f*** **jest skalarem**.

Własności:

Dywergencja oznacza źródłowość (co dzieje się z gęstością strumienia). Jeśli:

- div ***f*** >0 to mamy do czynienia ze źródłem (dana wielkość wypływa z obszaru),
- div ***f*** <0 to mamy do czynienia ze studnią (dana wielkość wpływa do obszaru),
- div ***f*** =0 to z danego obszaru tyle samo wypływa co wpływa.

$$\nabla \times \boldsymbol{f}(x,y,z) \equiv rot\boldsymbol{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)$$

Jest to iloczyn wektorowy wektora nabla i funkcji wektorowej, zatem rot ***f*** jest wektorem.

Własności:

Rotacja tworzy pole wektorowe wskazujące wirowanie (krążenie gęstości strumienia) pola wejściowego.

- jeśli rotacja danego pola wektorowego jest równa zero – to pole jest bezwirowe i takie pole posiada potencjał,
- jeśli pole nie posiada potencjału to takie pole jest polem wirowym

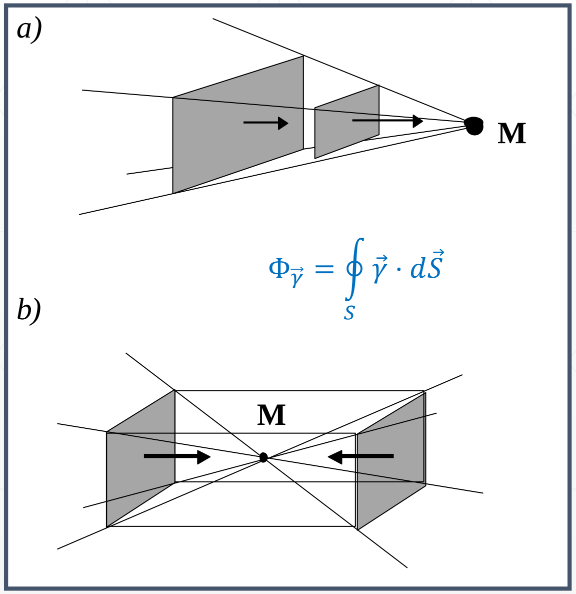
Pole grawitacyjne

Siła grawitacyjna jest przykładem siły centralnej. Innymi przykładami siły centralnej są siła elektrostatyczna i siła sprężystości.

Niezwykle ważną cechą siły centralnej jest to, że moment tej siły względem centrum wynosi zero, co oznacza, że w ruchu pod wpływem siły centralnej musi być zachowany moment pędu cząstki. Każda z sił centralnych jest siłą zachowawczą.

$$\boldsymbol{F} = \frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \frac{GM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \quad E_{p_r} = \int_{\infty}^{r} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\infty}^{r} \frac{GMm}{r^2}\,dr = -\frac{GMm}{r} \quad \phi(r) = \frac{E_{p_r}}{m} = -\frac{GM}{r}$$

$G = 6{,}66.10^{-11}[kg^{-1}m^3s^{-2}]$

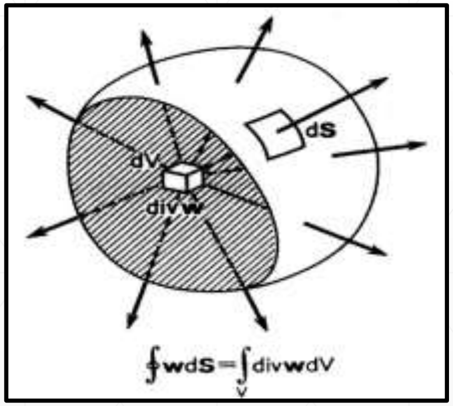


Prawo Gaussa dla pola grawitacyjnego:

$$\int_S \vec{\gamma}\cdot d\vec{S} = -4\pi MG$$

Tw. Gaussa-Ostrogradzkiego:

$$\int_S \vec{\gamma}\cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{\gamma}dV$$



Całkowity strumień wektora natężenia pola wychodzący przez powierzchnię zamkniętą otaczającą dany obszar pola, jest równy rozciągniętej na cała objętość obszaru całce z dywergencji wektora natężenia.

$$\int_S \boldsymbol{\gamma} \cdot d\boldsymbol{S} = -4\pi M G$$

$$\int_S \boldsymbol{\gamma} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_V div\, \boldsymbol{\gamma} dV$$

$$\mathrm{M} = \int_{\mathrm{V}} \rho\, \mathrm{d}\, \mathrm{V}$$

$$div\, \boldsymbol{\gamma} = -4\pi\rho G$$

$$\boldsymbol{\gamma} = -grad\phi$$

$$-div(grad\varphi) \equiv -\nabla \cdot \nabla\varphi \equiv -\nabla^2\varphi = -4\pi\rho G$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho\ G \quad \textbf{lub} \quad \Delta\phi = 4\pi\rho G$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho G$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{z}^2}$$

Równanie Poissona

(różniczkowa postać prawa Newtona)

Ruch w polu grawitacyjnym – prędkości kosmiczne

Pole grawitacyjne planety stanowi swoistą „pułapkę” dla dowolnego obiektu materialnego. Jeśli chce się z niej uwolnić, to energia ciała (kinetyczna) musi być większa niż energia potencjalnego oddziaływania pola planety.

I prędkość kosmiczna – prędkość obiektu dla poruszania się po stabilnej orbicie kołowej równej promieniowi planety.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \longrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Dla Ziemi o M= 5,96 · 10^{24} kg oraz r = 6,37 · 10^{6} m v_1= 7,91 km/s

II prędkość kosmiczna (prędkość ucieczki) – jest to najmniejsza prędkość, którą trzeba nadać ciału by oddaliło się od danej planety, teoretycznie do nieskończoności. Obliczamy ją porównując energię obiektu znajdującego się na powierzchni ciała niebieskiego oraz w nieskończoności. Energia w nieskończoności równa jest 0 (zarówno energia kinetyczna, jak i energia potencjalna pola grawitacyjnego), zatem na powierzchni sumaryczna energia też musi się równać 0:

$$E = -\frac{GM}{r} + \frac{mv^2}{2} \longrightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_1$$

Dla Ziemi v_2= 11,19 km/s

III prędkość kosmiczna to prędkość początkowa potrzebna do opuszczenia układu Słonecznego. Prędkość ta przy powierzchni Ziemi wynosi ok. 42 km/s, lecz wobec jej ruchu obiegowego wokół Słońca wystarczy przy starcie z jej powierzchni w kierunku zgodnym z tym ruchem nadać obiektowi dodatkową prędkość 16,7 km/s względem poruszającej się Ziemi, by opuścił on Układ Słoneczny

Ruch w polu grawitacyjnym – prawa Keplera

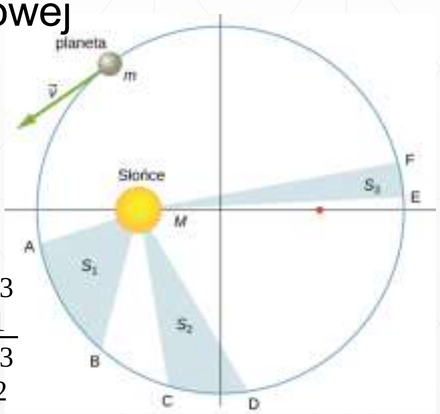
(ok. 1600 r.):

1) Torami planet są elipsy. Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy. (e=c/a, Merkury - 0,2, Ziemia -0,0167 różnica półosi 0,01%)
2) Prędkość polowa planety jest stała (promień wodzący planety zakreśla w jednakowym czasie jednakowe pola).
3) Stosunek kwadratów czasów obiegu dwóch planet jest równy stosunkowi trzecich potęg ich dużych półosi.

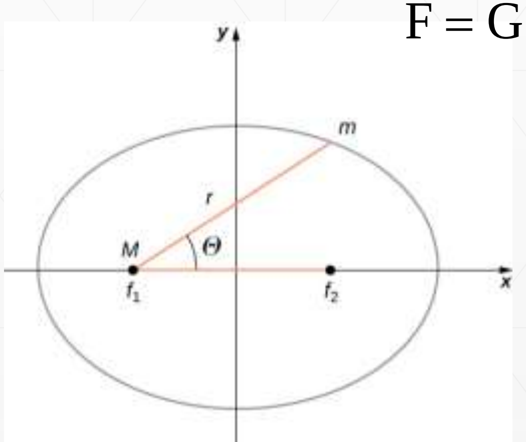
Pierwsze prawo jest szczególnym przypadkiem ruchu w polu centralnej siły grawitacyjnej

Drugie wynika z zasady zachowania momentu pędu w polu sił centralnych

Trzecie prawo wynika z porównania sił ciężkości i odśrodkowej



$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad F_d = \omega^2 rm = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}$$



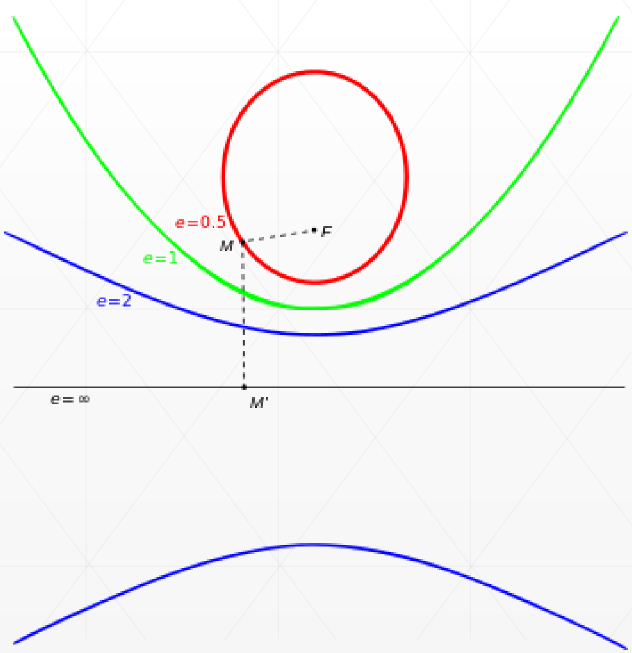
$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = \text{const} \qquad \frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} \quad \text{albo} \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

Współczesne ujęcie praw Keplera

Z praw mechaniki Newtona wynika, że trzy prawa Keplera poprawnie opisują ruch planety w układzie związanym ze Słońcem. Dokładniej: prawa Keplera mówią o układzie dwóch ciał obdarzonych masą, z których jedno ma masę zaniedbywalnie małą w porównaniu z masą drugiego. W przypadku dwóch ciał o porównywalnych masach układ odniesienia nie jest związany z żadnym z nich, tzn. żadne z nich nie jest ciałem centralnym. Prawa Keplera zupełnie zawodzą dla układu trzech i więcej ciał.

Podstawowymi pojęciami, w których współcześnie wyraża się te prawa to m.in. **masa, energia, siła, moment pędu**.



Wszystkie krzywe stożkowe można opisać rów. we współrz. bieg.:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\phi}$$

gdzie: (r, φ) – współrzędne pkt.;

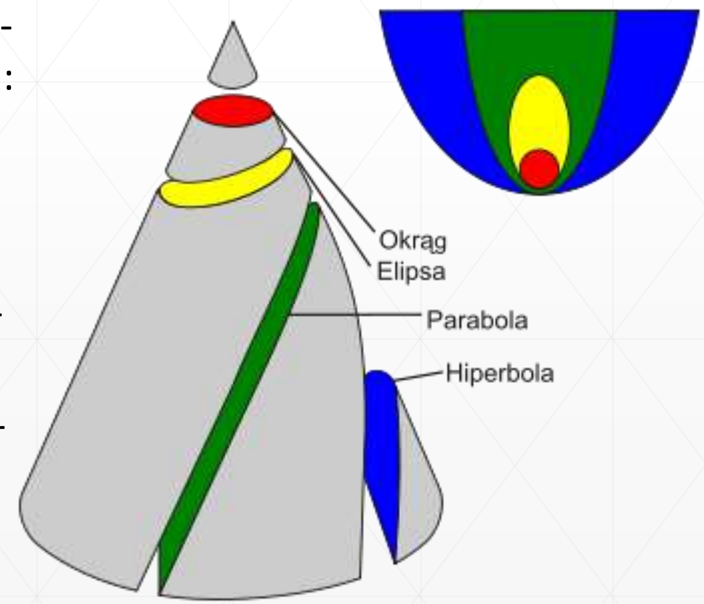
e – mimośród krzywej decydujący o jej kształcie:

$e = 0$ – okrąg, szczególny przypadek elipsy;

$0 \le e < 1$ – elipsa;

$e = 1$ - parabola;

$e > 1$ - hiperbola.



p– parametr, decydujący o kącie pomiędzy tworzącą a osią stożka

I prawo Keplera:

Torami planet są elipsy. Słońce znajduje się w jednym z ognisk elipsy.

Każde z dwóch ciał porusza się po krzywej stożkowej, w ognisku której znajduje się środek masy całego układu.

Ze środkiem tym jest związany inercjalny układ odniesienia, co wynika z zasady zachowania pędu i właśnie w tym układzie krzywa ma kształt pewnej stożkowej.

W szczególnie ważnym przypadku, gdy m<<M, jeden z parametrów stożkowej można wyznaczyć z zależności:

$$a = -\,G\frac{mM}{2U}$$

gdzie: a jest wielką półosią stożkowej (dla paraboli jest to ∞, dla hiperboli jest to połowa odległości między wierzchołkami obu gałęzi wzięta z minusem); m, M są masami obu ciał; G jest stałą grawitacji; U jest całkowitą energią orbitalną tj. sumą energii kinetycznej E_k i potencjalnej E_p ciała mniejszego w układzie związanym ze środkiem masy układu. Ponieważ E_p jest ujemna, więc można wartość całkowitej energii wyrazić jako $U=|E_k|-|E_p|$.

Z analizy powyższego równania wynika, że

- jeśli $a > 0$ czyli $U < 0$, to ciało porusza się po elipsie o półosi równej a,
- jeśli $a = \infty$ czyli $U = 0$, to ciało porusza się po paraboli,
- jeśli $a < 0$ czyli $U > 0$, to ciało porusza się po hiperboli o półosi równej $-a$.

Inaczej jeśli energia orbitalna jest nieujemna tj. $U \geq 0$ (dwa ostatnie przypadki), to mniejsze ciało porusza się na tyle szybko, że zbliży się do drugiego ciała tylko jednokrotnie.

II prawo Keplera:

Prędkość polowa planety jest stała (promień wodzący planety zakreśla w jednakowym czasie jednakowe pola).

Prawo to stwierdza, że dla dowolnej stożkowej:

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{\boldsymbol{J}}{2m} = const$$

gdzie: $\boldsymbol{v}_s$ jest prędkością polową rozumianą jako wektor prostopadły do płaszczyzny stożkowej, $d\boldsymbol{S}$ jest wektorem powierzchni o wartości pola zakreślanego w czasie *dt* przez promień wodzący o początku w ognisku stożkowej.

Powyższą zależność można zinterpretować jako przejaw działania zasady zachowania momentu pędu planety. Siła grawitacyjna bowiem, jako oddziaływanie centralne, w układzie podwójnym nie wywołuje momentów sił, zatem moment pędu układu zostaje zachowany.

Kinetyczne pojęcie prędkości polowej zastępuje się pojęciem dynamicznym, łatwo bowiem wyrazić je przy użyciu momentu pędu:

$$\vec{v_s} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{\vec{R} \times d\vec{s}}{2 \cdot dt} = \frac{\vec{R} \times \vec{v}}{2} = \frac{1}{2}\frac{\vec{J}}{m}$$

gdzie: $\vec{J}$ - moment pędu planety, *m* - masa planety, d $\vec{s}$- nieskończenie mały wektor przesunięcia w ruchu po orbicie, $\vec{R}$- promień wodzący z ogniska, $\vec{v}$- prędkość liniowa na orbicie.

Zastosowano tu wzór na pole trójkąta: $dS = \frac{1}{2} R ds \sin\alpha = \frac{1}{2}|\vec{R} \times d\vec{s}|$, gdzie α jest kątem między promieniem wodzącym a wektorem przesunięcia $\vec{ds}$ na orbicie.

III prawo Keplera:

Stosunek kwadratów czasów obiegu dwóch planet jest równy stosunkowi trzecich potęg ich dużych półosi.

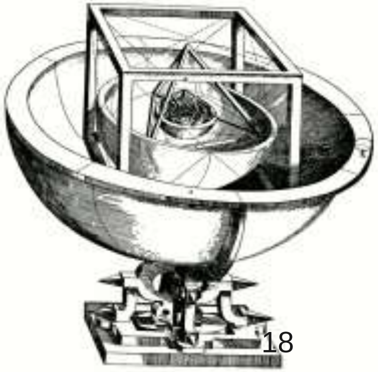
Jeśli planeta porusza się w polu grawitacyjnym gwiazdy, ale jej masa jest na tyle duża, że nie można jej pominąć przy porównaniu z masą gwiazdy, natomiast pominie się oddziaływania z innymi ciałami, obowiązuje zależność zwana uogólnionym III prawem Keplera

$$d^3 = G\frac{(M_S + m)}{4\pi^2}T^2$$

gdzie: d – odległość między środkami mas: planety i obieganej gwiazdy; G – stała grawitacji; m – masa danej planety; M_S – masa gwiazdy; T - okres obrotu planety wokół gwiazdy.

W rzeczywistości Kepler sformułował cztery prawa opisujące parametry orbit planet, jednak według współczesnej metodologii naukowej tzw. IV prawo nie jest uznawane jako prawo natury, a jedynie jako przypadkowa zbieżność. Zostało ono odkryte najwcześniej ze wszystkich jego praw i opublikowane w roku 1596 (*Mysterium Cosmographicum*).

Tak zwane „IV prawo" wiąże ze sobą promienie orbit planet. Kepler odkrył tę zależność wpisując i opisując na poszczególnych wielościanach foremnych sfery o promieniach odpowiednio dobranych planet. Promienie orbit, które Kepler dopasowywał, były wyznaczone przy użyciu ówczesnych metod i dlatego nie były zbyt dokładne.



Ustawiając na przemian sfery i wielościany Kepler zauważył, że:

- ośmiościan foremny opisany na sferze Merkurego jest wpisany w sferę Wenus.
- dwudziestościan foremny opisany na sferze Wenus jest wpisany w sferę Ziemi;
- dwunastościan foremny opisany na sferze Ziemi jest wpisany w sferę Marsa,
- czworościan foremny opisany na sferze Marsa jest wpisany w sferę Jowisza
- sześcian opisany na sferze Jowisza jest wpisany w sferę Saturna.

Podsumowanie

Pojęcie pola

- Pole to nowoczesny sposób na przedstawianie oddziaływań w fizyce
- Pola centralne to pola w których charakterystyczne kierunki przechodzą przez środek (centrum) a wartości zależą od odległości.
- Pola mogą być skalarne lub wektorowe, zachowawcze (potencjalne) lub niezachowawcze, stacjonarne lub niestacjonarne.
- Wielkości charakteryzujące pola to: natężenie pola, energia potencjalna pola oraz potencjał pola.
- Pola zachowawcze to pola w których praca nie zależy od drogi a jedynie od początkowego i końcowego położenia ciała.

Prawo powszechnego ciążenia

- Wszystkie ciała przyciągają się ku sobie dzięki sile grawitacji, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości pomiędzy nimi.
- Sferycznie symetryczne ciała można traktować tak, jakby cała ich masa była zlokalizowana w ich środku.
- Niesymetryczne ciała można traktować tak, jakby ich cała masa była skoncentrowana w ich środku masy, pod warunkiem, że ich odległość od innych ciał jest duża w porównaniu z ich rozmiarami.

Grawitacja przy powierzchni Ziemi

- Ciężar ciała wynika z przyciągania grawitacyjnego między Ziemią a tym ciałem.
- Pole grawitacyjne jest reprezentowane przez linie pola grawitacyjnego. Określają one kierunek siły grawitacji, a odległość między liniami określa natężenie pola grawitacyjnego.
- Z powodu występowania przyspieszenia dośrodkowego, wynikającego z ruchu obrotowego Ziemi, ciężar pozorny i siła ciężkości są różne.

Energia potencjalna i całkowita pola grawitacyjnego

- Przyspieszenie ziemskie zmniejsza się w miarę oddalania się od Ziemi, a wyrażenie na grawitacyjną energię potencjalną musi odzwierciedlać tę zmianę.
- Energia całkowita układu jest sumą energii kinetycznej oraz grawitacyjnej energii potencjalnej i jest ona zachowana w ruchu po orbicie.
- Ciała muszą posiadać minimalną prędkość — prędkość ucieczki, aby opuścić planetę i nigdy na nią nie powrócić.
- Ciała o energii całkowitej mniejszej niż zero są związane grawitacyjne; te o energii całkowitej równej lub większej od zera nie są związane.

Prawa Keplera

- Wszystkie ciała poruszają się po orbitach będących krzywymi stożkowymi. Orbity ciał związanych grawitacyjnie są krzywymi zamkniętymi i mają kształt okręgu lub elipsy, a orbity ciał niezwiązanych grawitacyjnie są krzywymi otwartymi i mają kształt paraboli lub hiperboli.
- Prędkość polowa ciała na dowolnej orbicie jest stała, co odzwierciedla zasadę zachowania momentu pędu.
- Kwadrat okresu obiegu planety wokół gwiazdy po orbicie eliptycznej jest proporcjonalny do sześcianu długości półosi wielkiej tej orbity.