5. Zasady zachowania w mechanice

- zasada zachowania energii,
- zasada zachowania pędu,
- zasada zachowania momentu pędu,
- tarcie,
- rola zasad zachowania w mechanice.

Zasada zachowania energii

Energia całkowita E każdego układu odosobnionego (na który nie działają zewnętrzne pola siłowe), *zawarta w wypełniających go masach i polach, we wszelkich jej postaciach, pozostaje stała w czasie.*

$$E = E_k + E_p + U$$

Zasada zachowania energii (mechanicznej)

W układzie odosobnionym (takim na który nie działają zewnętrzne siły) *energia mechaniczna E_M całego układu pozostaje stała*

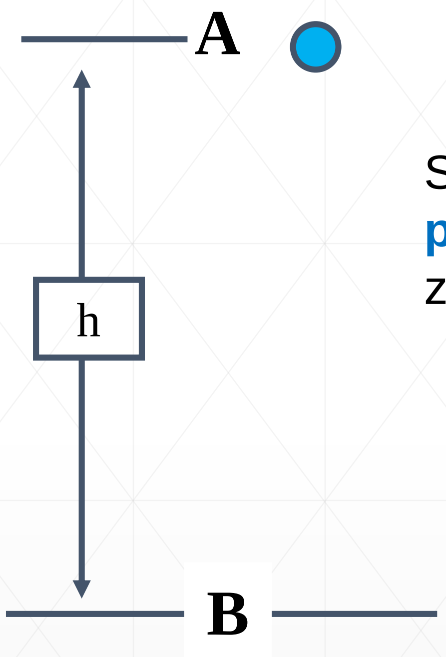
$$E_M = E_k + E_p = \text{const}$$

Cały świat opiera się na przemianach jednej formy energii w drugą.
Energia:

- nie pojawia się nie wiadomo skąd,
- nie ginie nie wiadomo gdzie.

Przykład – 1 – spadek swobodny

Jaką prędkość osiągnie ciało o masie m przy swobodnym spadku z wysokości h jeżeli można pominąć opory ruchu?



$$E=E_k+E_p=const$$

Suma energii kinetycznej i potencjalnej cząstki w polu **sił potencjalnych** jest stała i nie zależy od punktu, w którym znajduje się cząstka

Dla pkt. A: $E_{K(A)} = 0, \quad E_{p(A)} = mgh$

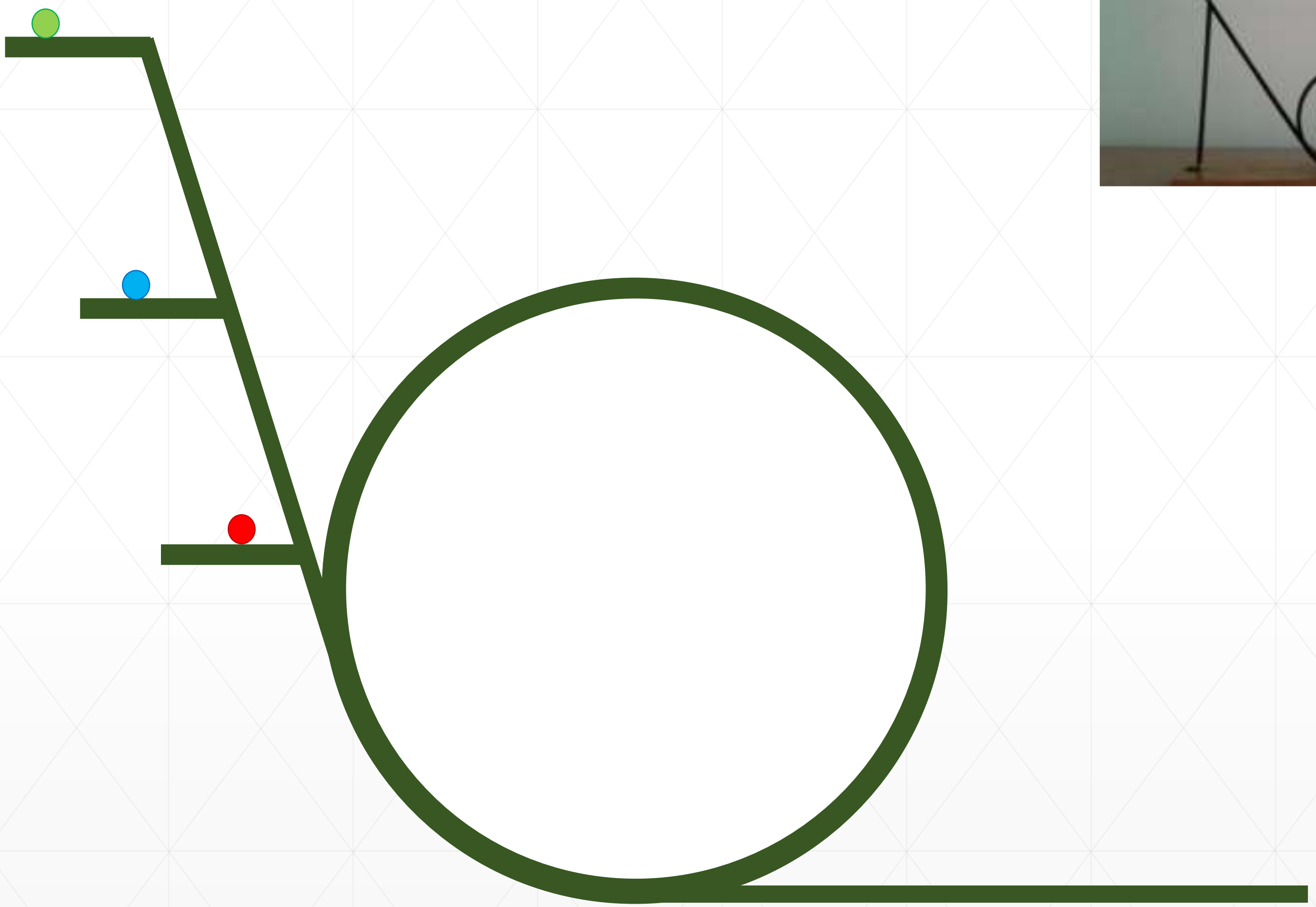
Dla pkt. B: $E_{K(B)} = \frac{mV^2}{2}, \quad E_{p(B)} = 0$

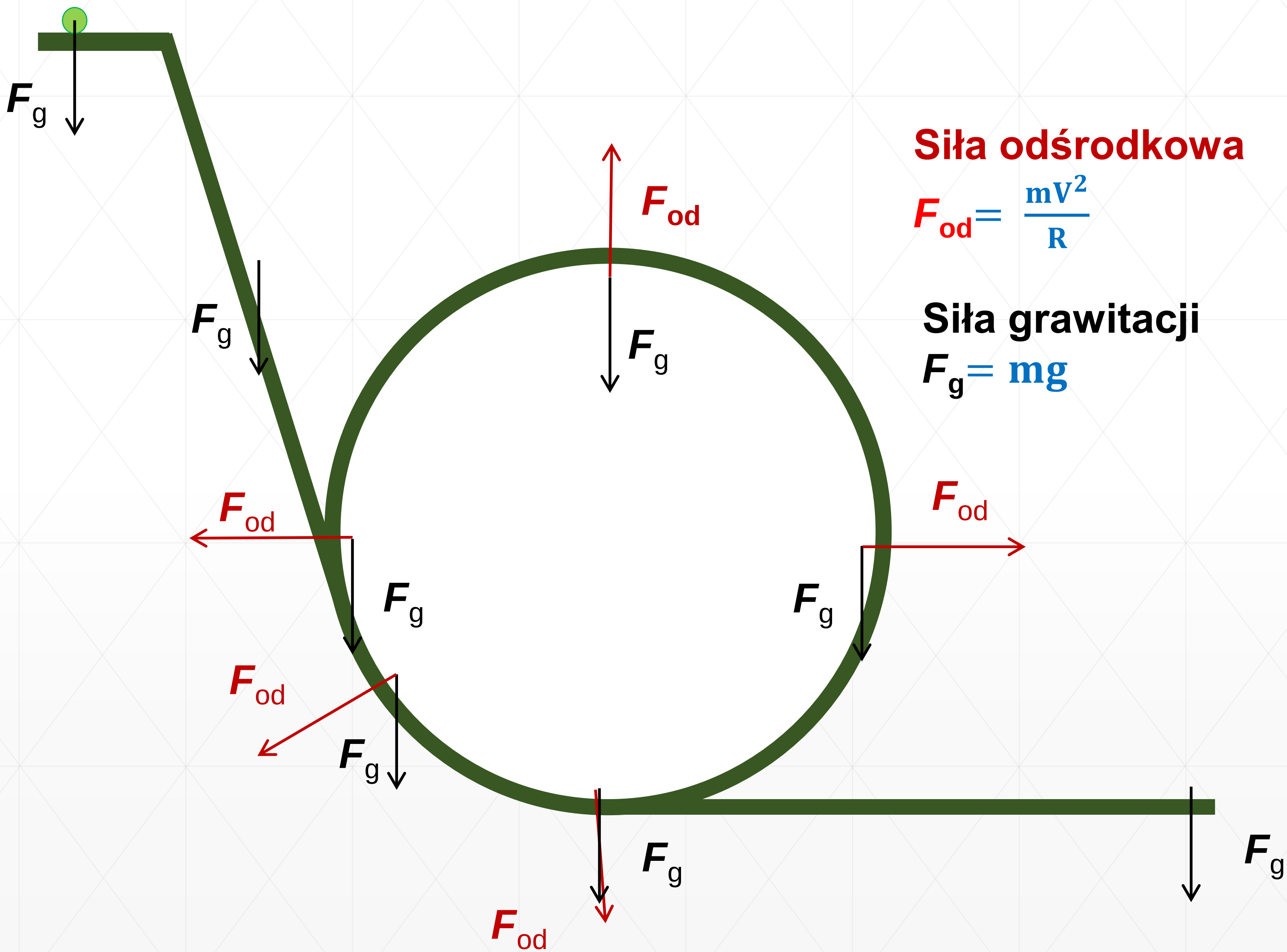
$$E_{K(A)} + E_{P(A)} = E_{K(B)} + E_{P(B)} \Leftrightarrow 0 + \mathrm{mgh} = \frac{mV^2}{2} + 0$$

Zasada Galileusza – prędkość w spadku swobodnym nie zależy od masy a tylko od wysokości.

$$V = \sqrt{2gh}$$

Przykład 2 – pętla śmierci





Siła odśrodkowa

$F_{od} = \frac{mV^2}{R}$

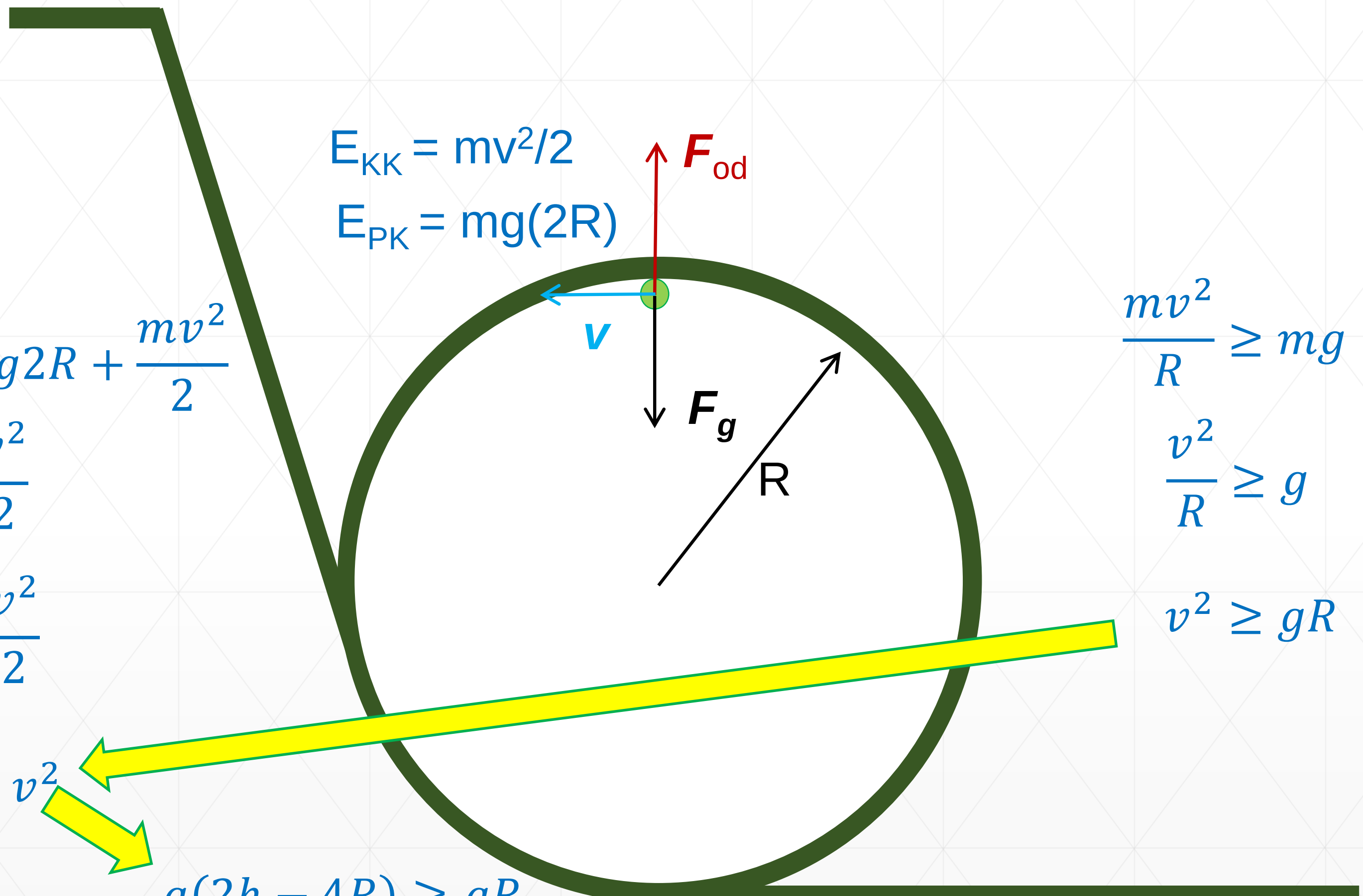
Siła grawitacji

$F_g = mg$

$E_{PP} = mgh \qquad E_{KP} = 0$

$E_{KK} = mv^2/2$

$E_{PK} = mg(2R)$



$$mgh + 0 = mg2R + \frac{mv^2}{2}$$

$$gh = 2gR + \frac{v^2}{2}$$

$$g(h - 2R) = \frac{v^2}{2}$$

$$g(2h - 4R) = v^2$$

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg$$

$$\frac{v^2}{R} \geq g$$

$$v^2 \geq gR$$

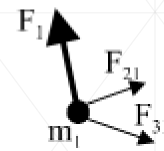
$$g(2h - 4R) \geq gR$$

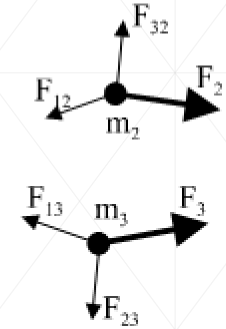
$$2h - 4R \geq R \qquad 2h \geq 5R$$

$$\boldsymbol{h \geq \frac{5}{2} R}$$

Wysokość startowa h musi być większa od 5/2 R

Zasada zachowania pędu





Przypomnienie: II zasada dynamiki Newtona stwierdza, że *zmiana pędu ciała równa jest popędowi siły wywartemu na to ciało*

$$\boldsymbol{F}dt = d\boldsymbol{p}$$

Rozważmy układ punktów materialnych, na które działają siły wewnętrzne $\boldsymbol{F_w}$ oraz siły zewnętrzne $\boldsymbol{F_z}$ – wówczas

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_w + \sum \boldsymbol{F}_z$$

Z III zasady dynamiki wynika, że siły wewnętrzne występują parami, których składniki są równe co do wartości, lecz przeciwne co do kierunku. Stąd wniosek, że wypadkowa wszystkich sił wewnętrznych równa się zeru

$$\sum \boldsymbol{F}_w = 0$$

Zatem przyrost pędu układu ***p*** może się dokonać tylko poprzez działanie na układ sił zewnętrznych

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{dt}} = \sum \boldsymbol{F}_z = \boldsymbol{F}$$

Jeżeli wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych działających na rozważany układ równa się zeru to

Suma wektorowa pędów wszystkich elementów układu izolowanego (na który nie działają siły zewnętrzne) *pozostaje stała.*

$$\sum \boldsymbol{p}_i = \mathrm{const}$$

Oddziaływanie wzajemne elementów układu siłami wewnętrznymi nie zmienia całkowitego pędu układu.

Przykład 3 – zderzenie niesprężyste

(zasada zachowania pędu + zasada zachowania energii)

Pocisk o masie m posiadający prędkość v_P uderza w przeszkodę o masie M. W wyniku uderzenia zagłębia się w przeszkodę i razem z nią porusza się z prędkością v_K. Należy obliczyć tą prędkość (v_K). Jest to zderzenie niesprężyste.

$$\boldsymbol{p}_p = m\boldsymbol{v}_p$$

$$\sum \boldsymbol{p}_i = \text{const}$$

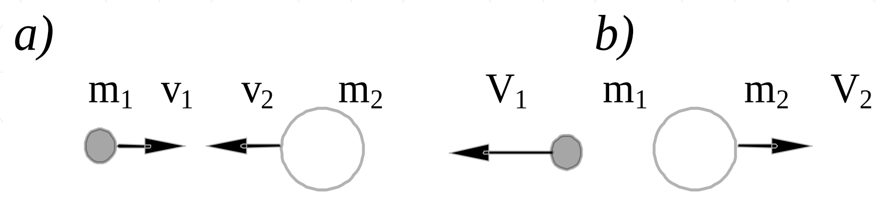
$$\boldsymbol{p}_p = \boldsymbol{p}_k$$

$$\boldsymbol{p}_k = (m+M)\boldsymbol{v}_k$$

$$mv_p = (m+M)v_k \Longrightarrow v_k = \frac{m}{(m+M)} v_p$$

Przykład 3 – zderzenie sprężyste

(zasada zachowania pędu + zasada zachowania energii)



Z zasady zachowania pędu

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$
$$\Rightarrow$$
$$m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2)$$

Z zasady zachowania energii (tutaj tylko kinetyczna)

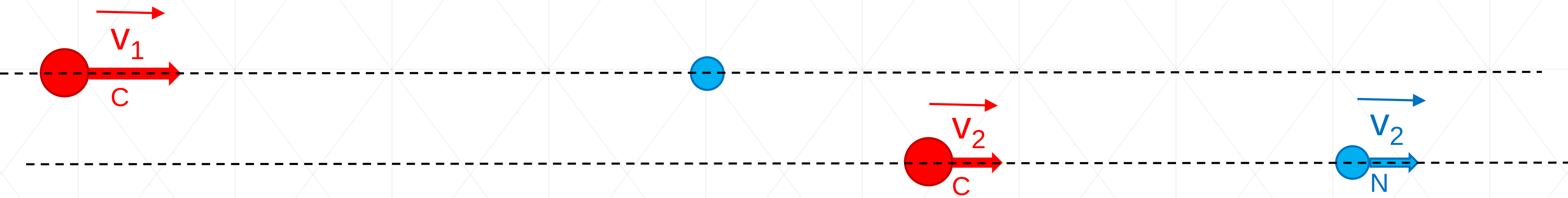
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} \Rightarrow m_1(v_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - v_2^2)$$

Zatem (po trywialnym matematycznym przekształceniu)

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{oraz} \quad V_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

Gdy $m_1 = m_2$, wówczas następuje wymiana prędkości kul: $V_1 = v_2$ i $V_2 = v_1$.

Kula czerwona o masie m posiadająca prędkość v_{1C} uderza w kulę niebieską o masie m/2. W wyniku uderzenia kula niebieska zaczyna się poruszać z prędkością v_{2N} i za nią porusza się (w tym samym kierunku) kula czerwona z prędkością v_{2C}. Obliczyć prędkości po zderzeniu: v_{2C}, v_{2N}



Z zasady zachowania energii: $$\frac{\cancel{m}(v_{1C})^2}{2} = \frac{\cancel{m}(v_{2C})^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}\cancel{m}(v_{2N})^2}{2}$$

Z zasady zachowania pędu: $$\cancel{m}v_{1C} = \cancel{m}v_{2C} + \frac{1}{2}\cancel{m}v_{2N}$$

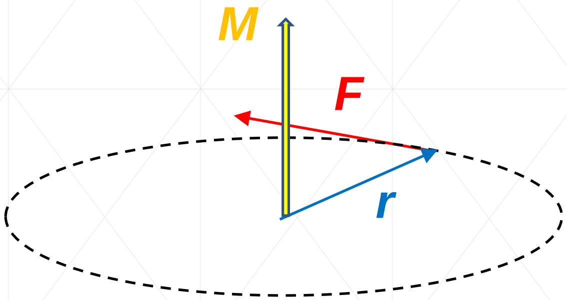
Po podstawieniu z drugiego równania do pierwszego za v_{2C} otrzymujemy: $$v_{1C}{}^2 = (v_{1C} - v_{2N})^2 + v_{2N}{}^2$$

I ostatecznie $$v_{2N} = \frac{4}{3}v_{1C} \qquad v_{2C} = \frac{1}{3}v_{1C}$$

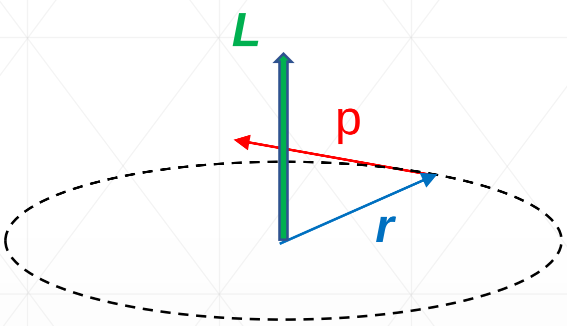
Zasada zachowania momentu pędu

Przypomnienie: Wielkości opisujące ruch obrotowy

Moment siły ***M*** to iloczyn wektorowy (×) ramienia ***r*** na którym działa siła i tej siły ***F***:



$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

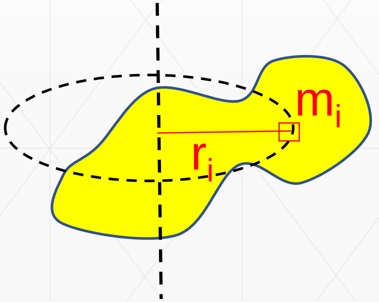


Moment pędu ***L*** to iloczyn wektorowy (×) ramienia ***r*** i pędu ***p***, który posiada ciało:

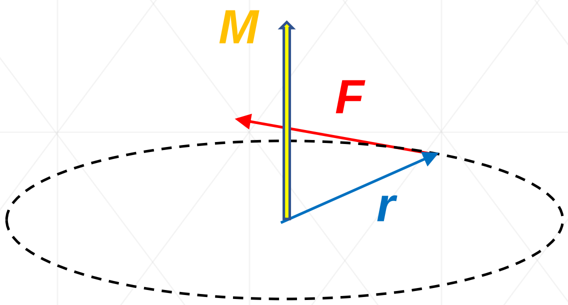
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$

Moment bezwładności (I) to (dla ciała dyskretnego) suma iloczynów mas (m_i) i kwadratu odległości (r_i) i-tej masy od osi obrotu:

$$\mathrm{I} = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i{}^2$$

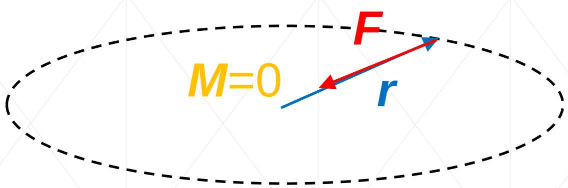


Jeżeli siła będzie skierowana wzdłuż promienia (albo do osi obrotu albo od osi obrotu) to na układ nie będzie działał moment siły!

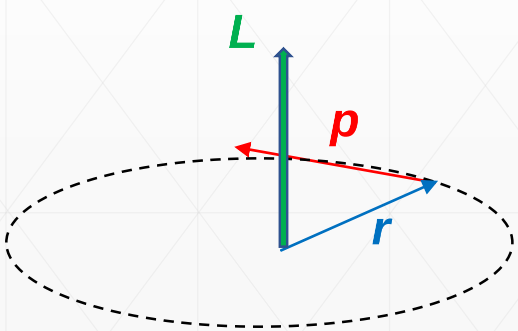


$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

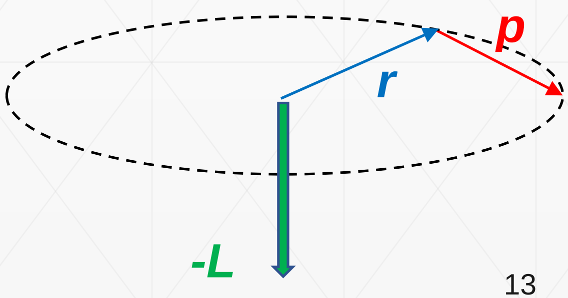
$$|M| = rF \sin\sphericalangle(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F})$$



Zmiana pędu na przeciwny powoduje, że moment pędu staje się skierowany w przeciwna stronę – zgodnie z właściwościami iloczynu wektorowego



$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$$



Dla dowolnego izolowanego układu punktów materialnych całkowita suma ich momentów pędu jest stała.

W przypadku bryły sztywnej zasadę tę można sformułować następująco:

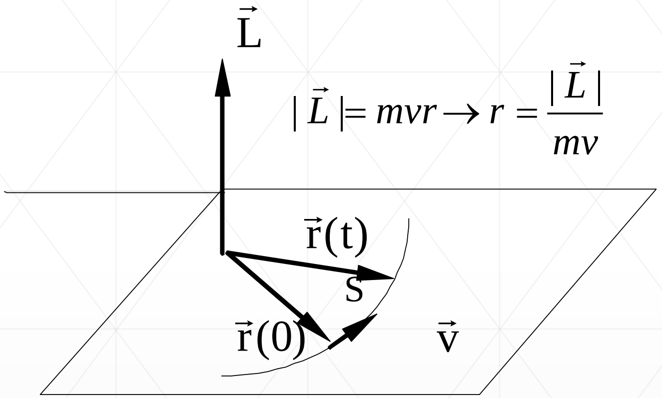
Moment pędu bryły pozostaje stały, gdy nie działa na nią ***żaden*** *moment siły zewnętrznej.*

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{M}$$

$$\boldsymbol{M} = 0 \ \text{ gdy } \boldsymbol{L} = const$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{M} = 0 \ \text{ gdy } \boldsymbol{r} \,||\, \boldsymbol{F}$$



W polu sił centralnych (**L**=const) ruch ciała jest ruchem płaskim przy czym prędkość polowa dS/dt=const=L/2m.

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{mvr} = \frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{\mathrm{mv}} = \frac{|\vec{L}|}{2\mathrm{m}}\mathrm{t}$$

W układzie izolowanym, w którym występują pola i cząstki całkowity pęd, moment pędu i energia są zachowane.

Przykład 5 - Zastosowanie zasady zachowania momentu pędu - I

Człowiek obraca się na krześle.

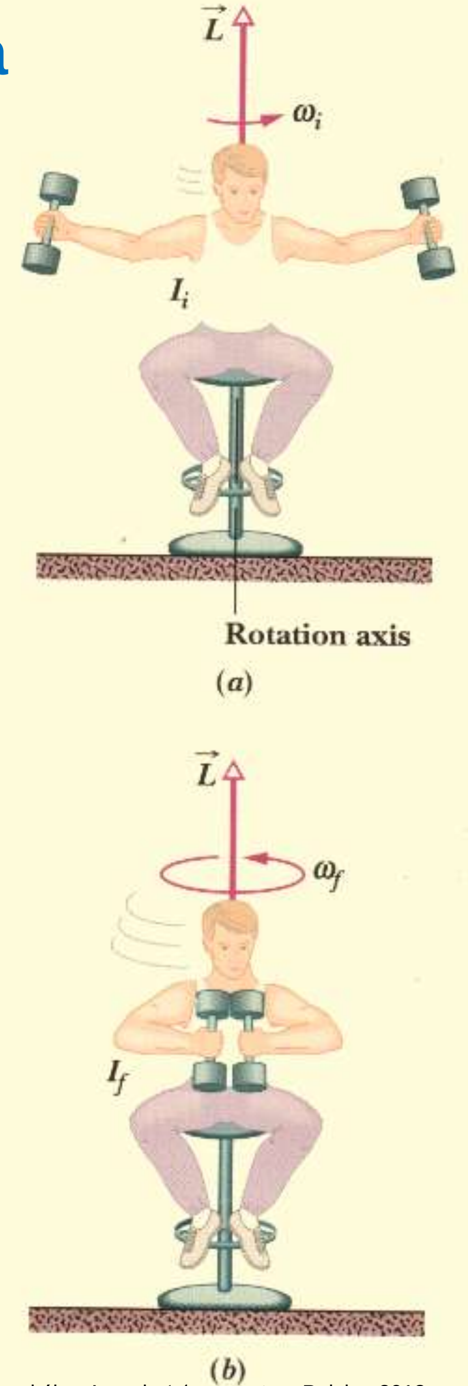
Przyciągając do siebie ciężarki zmniejsza moment bezwładności układu ($I_i > I_f$) (krzesło+człowiek+ciężarki).

Na układ nie działają momenty sił zewnętrzne.

Wobec stałości iloczynu:

$$I\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{L} = const$$

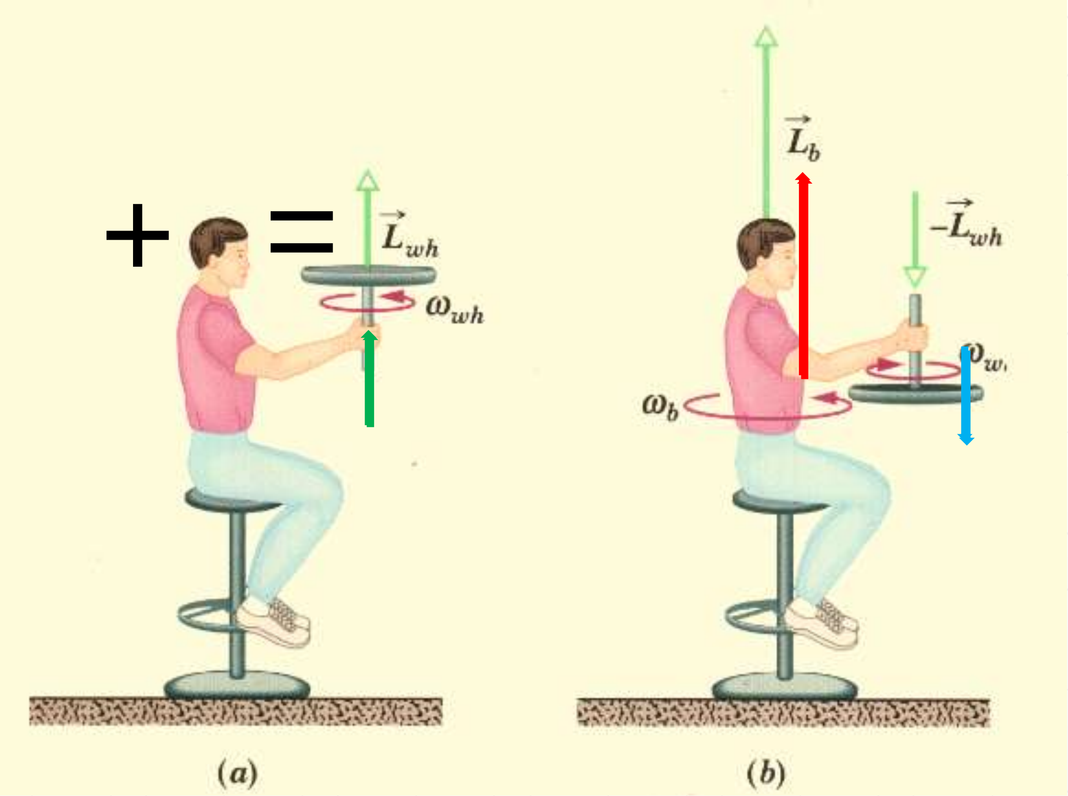
gdy maleje I to musi proporcjonalnie wzrosnąć $\boldsymbol{\omega}$ ($\omega_f > \omega_i$).



W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

Przykład 6 - Zastosowanie zasady zachowania momentu pędu - II

Człowiek siedzi na krześle obrotowym trzyma jednocześnie koło obracające się (oś obrotu pionowa) z prędkością kątową ω_{wh}. Koło to ma moment pędu ($\boldsymbol{L}_{wh}$) skierowany ku górze. Człowiek obraca koła tak aby jego moment pędu był skierowany w dół ($-\boldsymbol{L}_{wh}$).



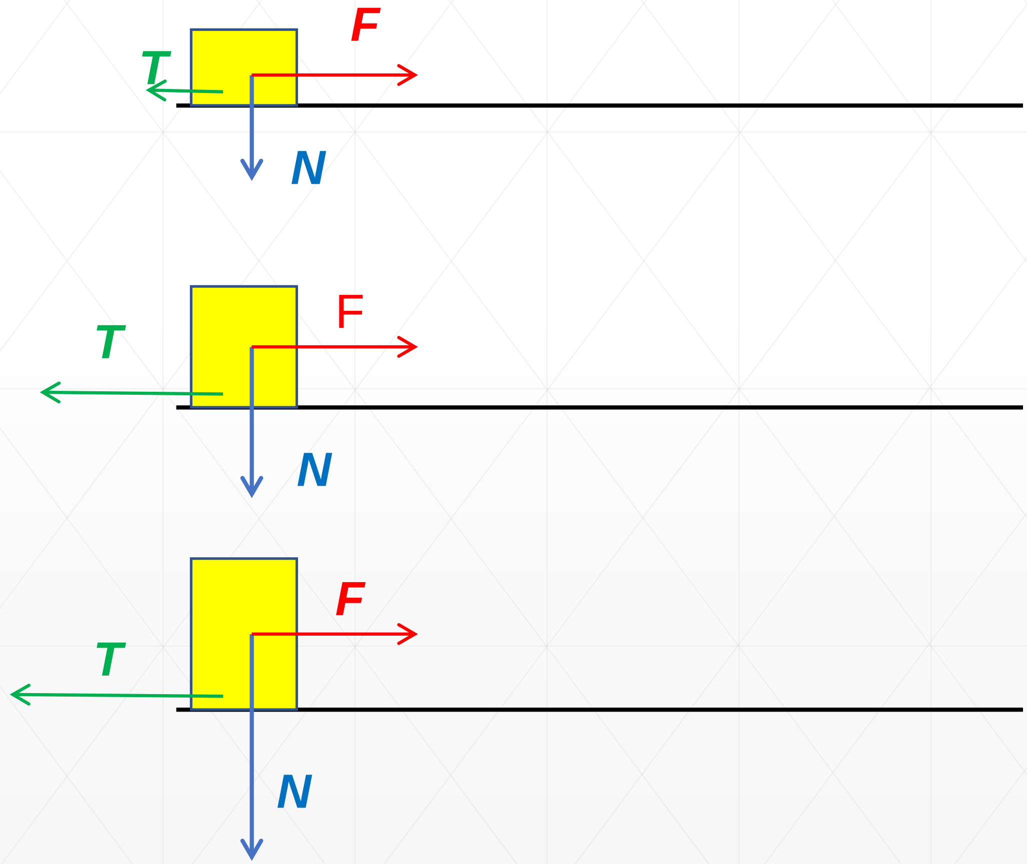
W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych, t.1, openstax, Polska, 2018

Wówczas sam na krześle obrotowym zaczyna się obracać w uzyskując moment pędu $\boldsymbol{L}_b$ takiej wartości aby wypadkowy moment pędu był taki sam (czyli skierowany do góry) jak to było przed początkiem ruchu.

Tarcie

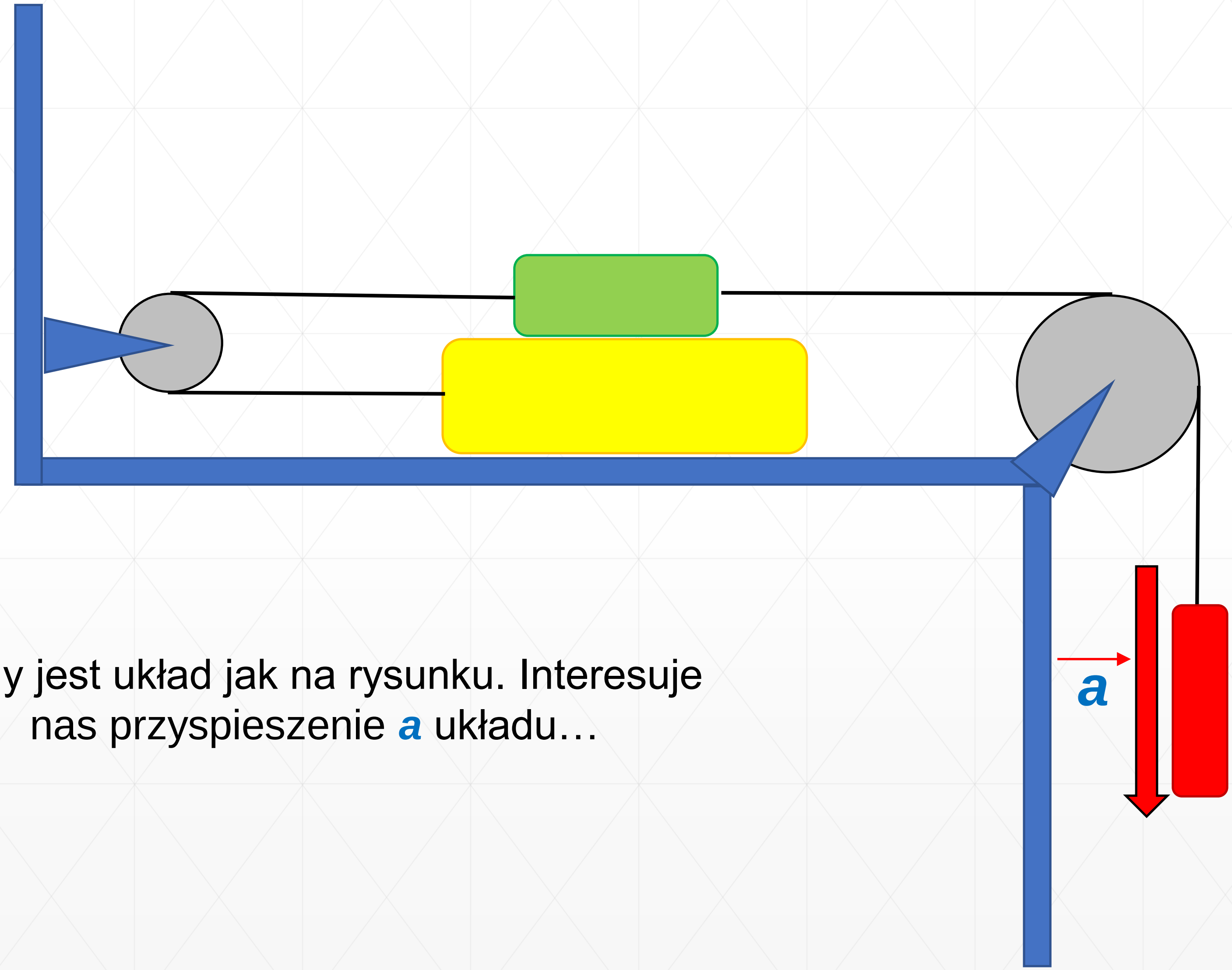
- Tarcie jest oporem ruchu.
- Działa zawsze przeciwnie do ruchu
- Zależy od nacisku i rodzaju powierzchni

$$f = \frac{T}{N} \Rightarrow T = fN$$

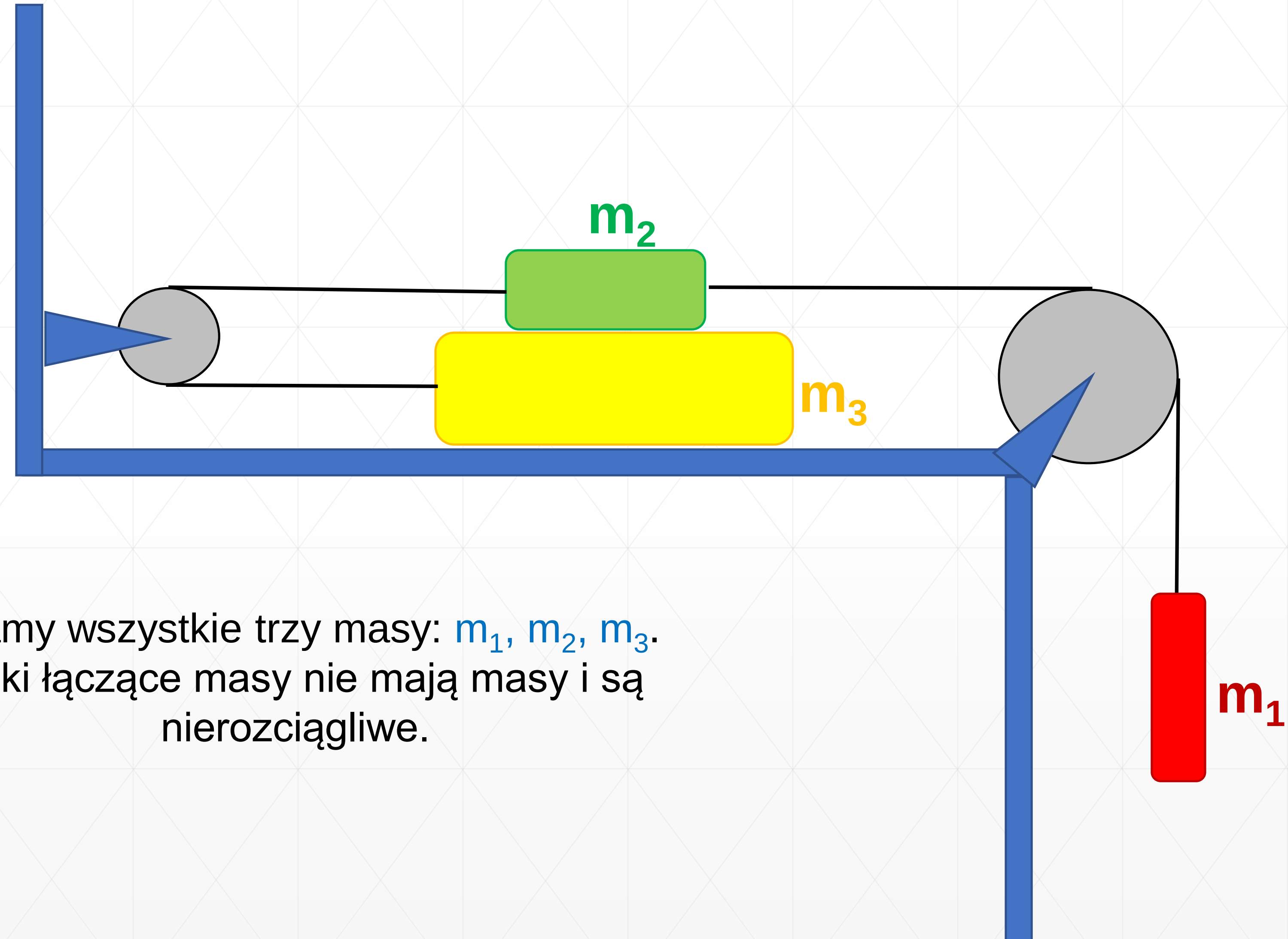


N – nacisk
T – tarcie
f – współczynnik tarcia

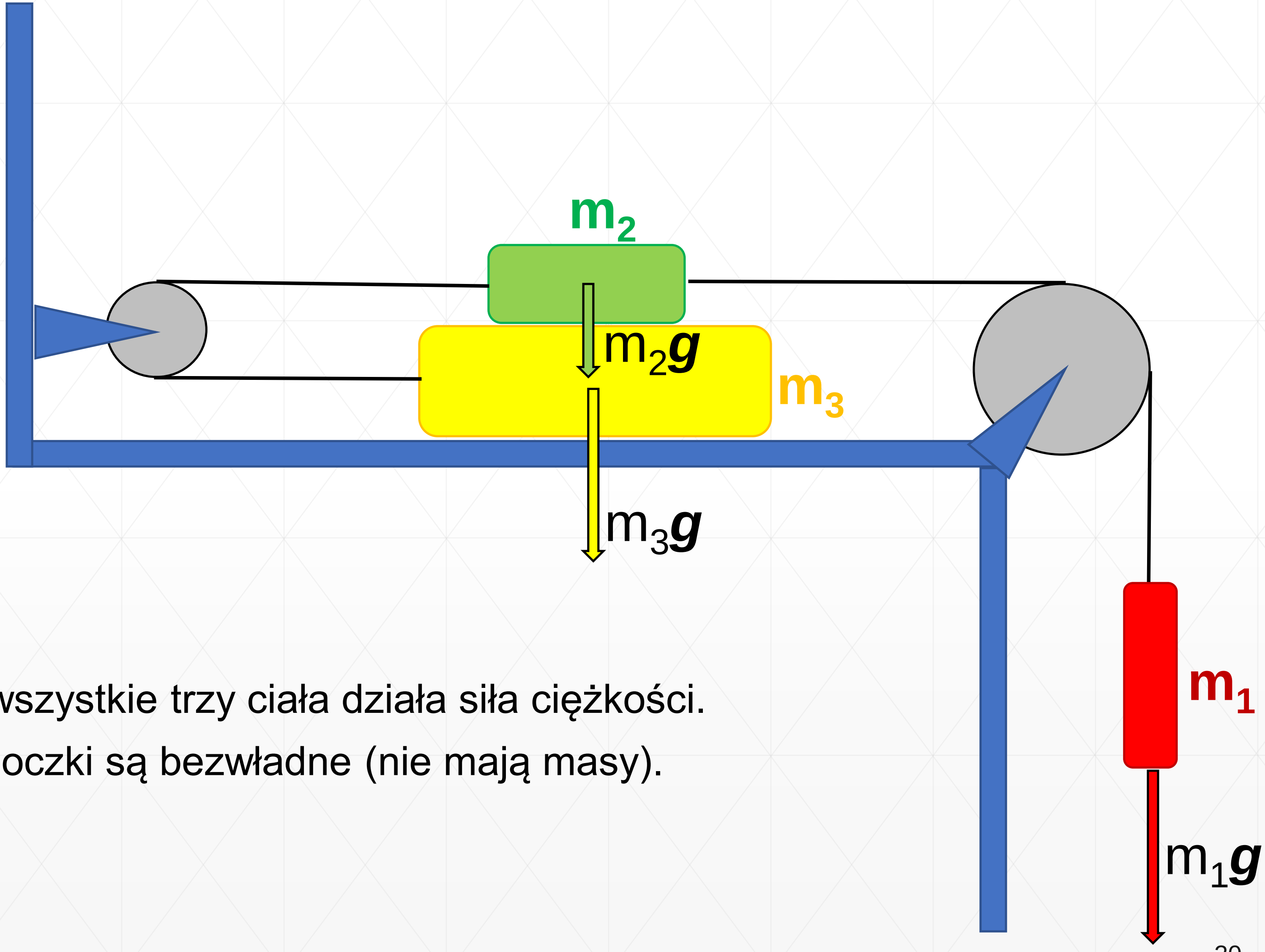
Przykład z tarciem



Dany jest układ jak na rysunku. Interesuje nas przyspieszenie *a* układu…

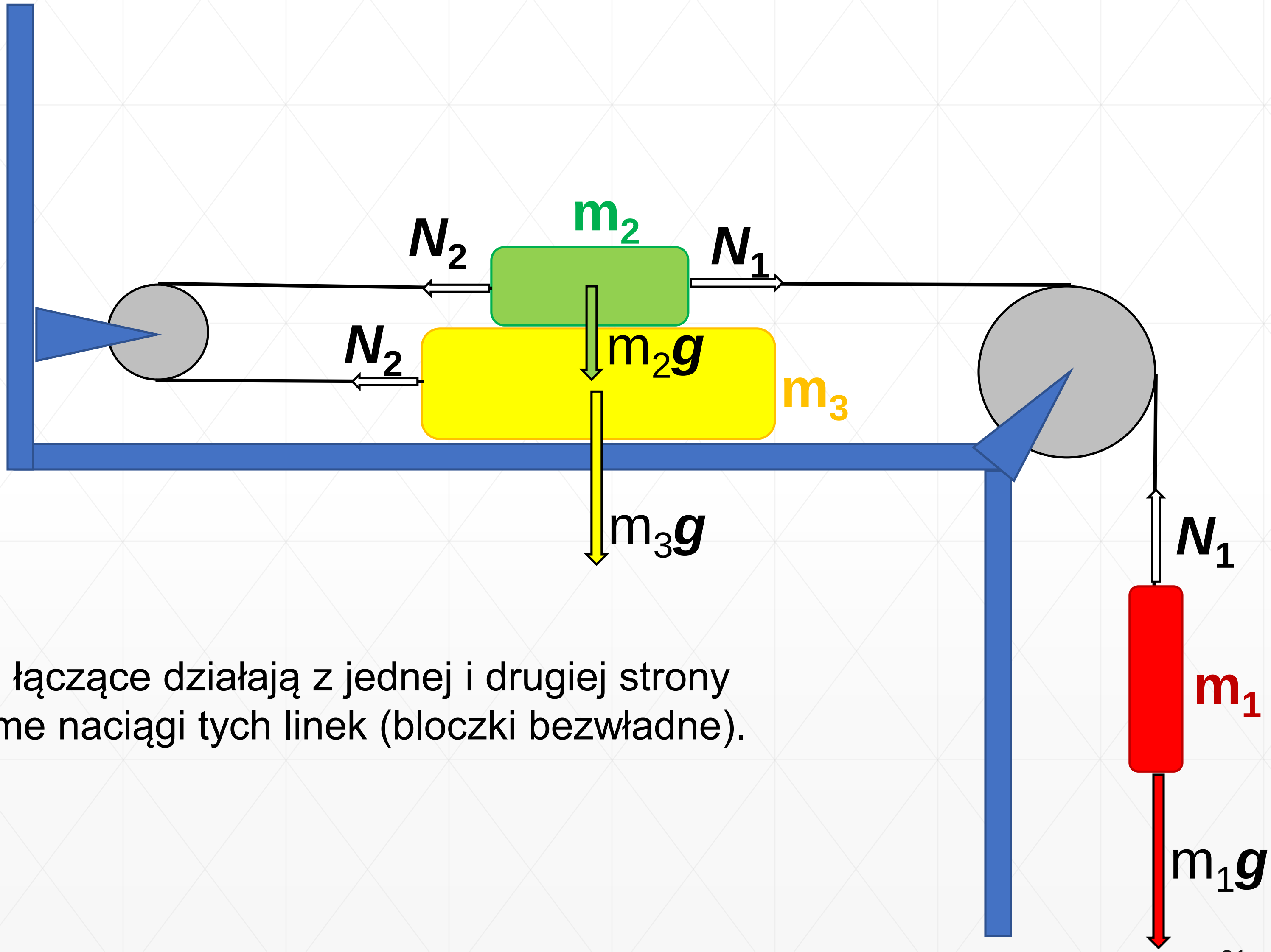


Znamy wszystkie trzy masy: m_1, m_2, m_3.
Linki łączące masy nie mają masy i są nierozciągliwe.

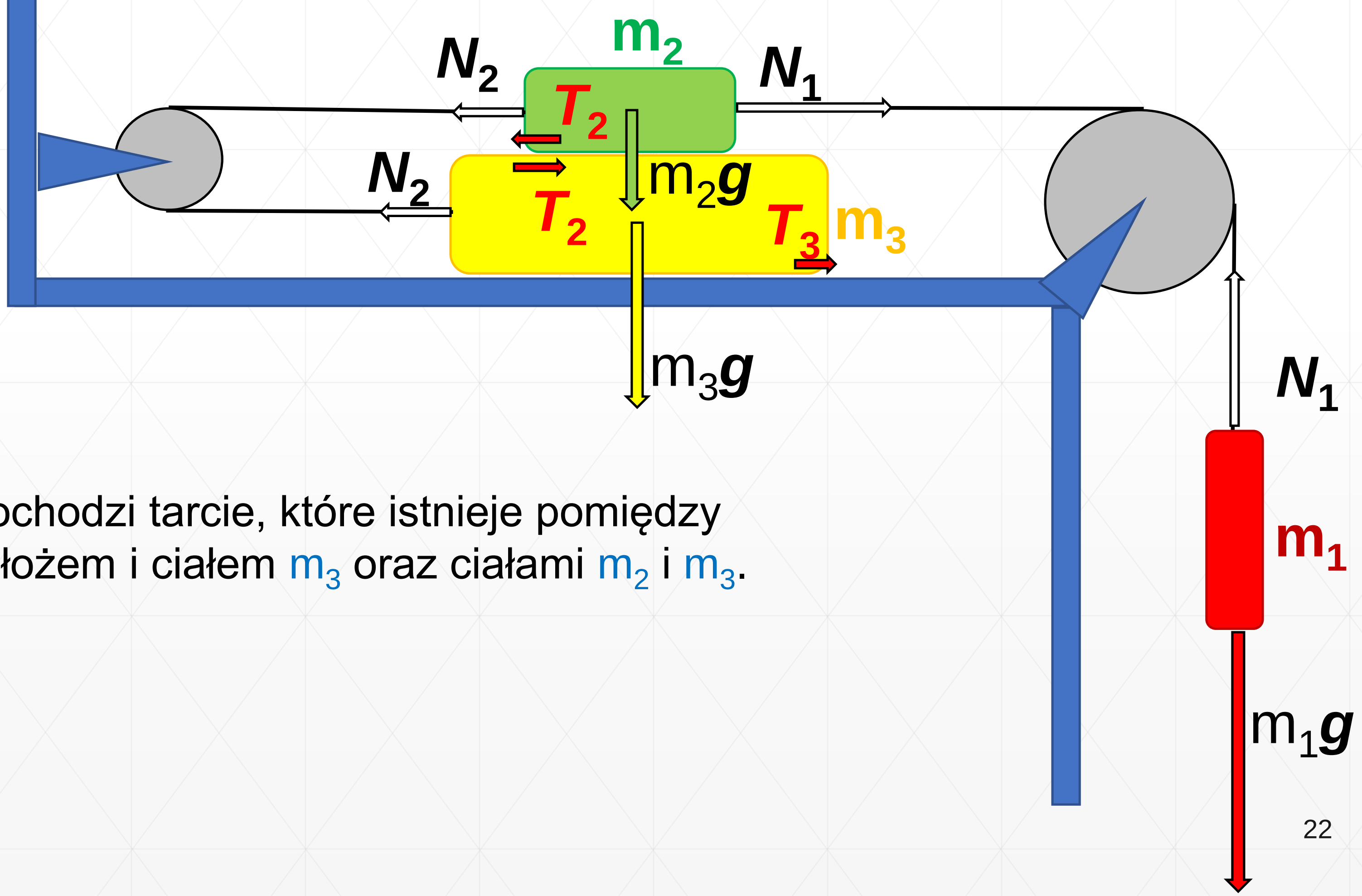


Na wszystkie trzy ciała działa siła ciężkości.

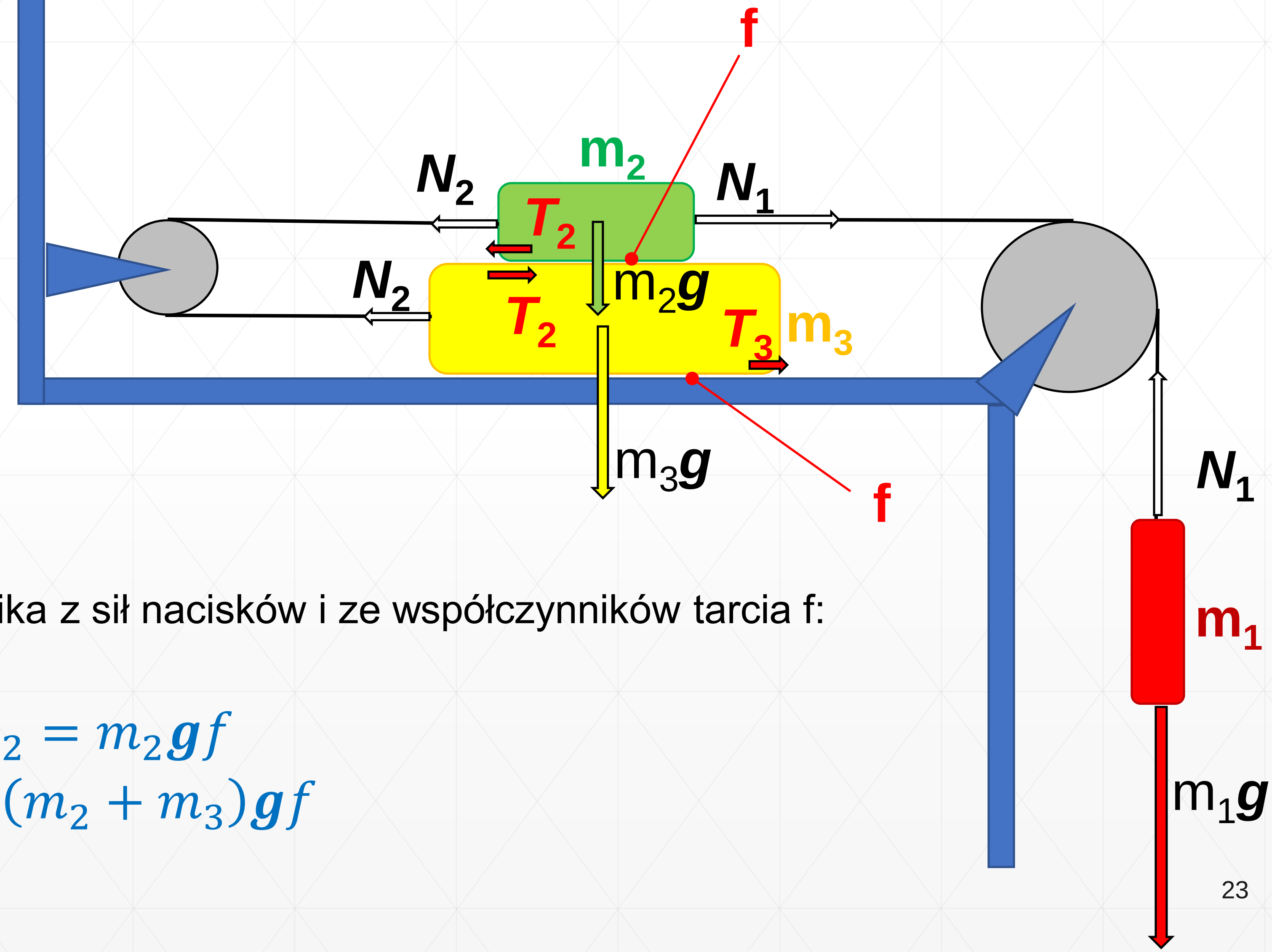
Bloczki są bezwładne (nie mają masy).



Na linki łączące działają z jednej i drugiej strony
takie same naciągi tych linek (bloczki bezwładne).

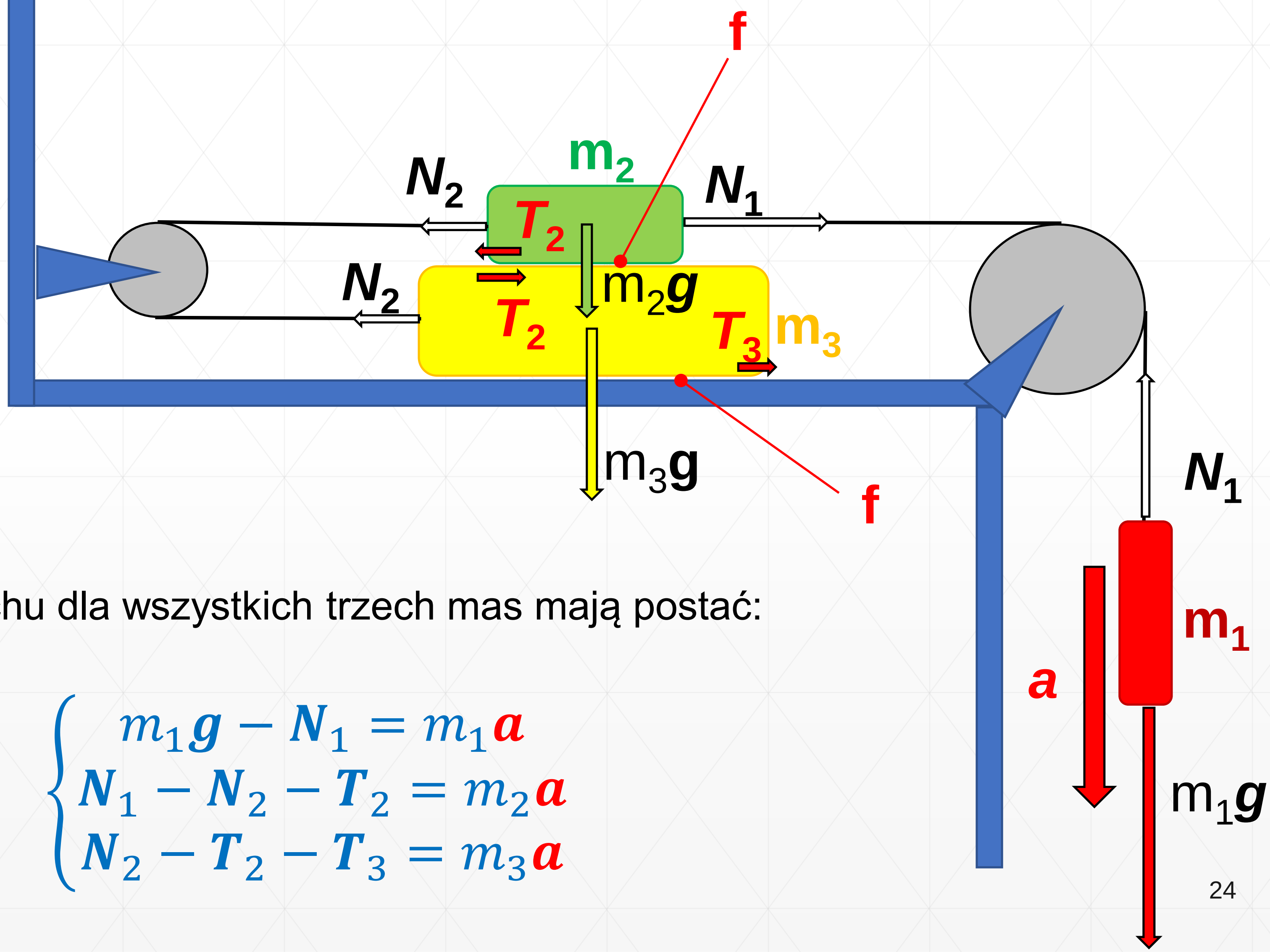


Dochodzi tarcie, które istnieje pomiędzy podłożem i ciałem m_3 oraz ciałami m_2 i m_3.



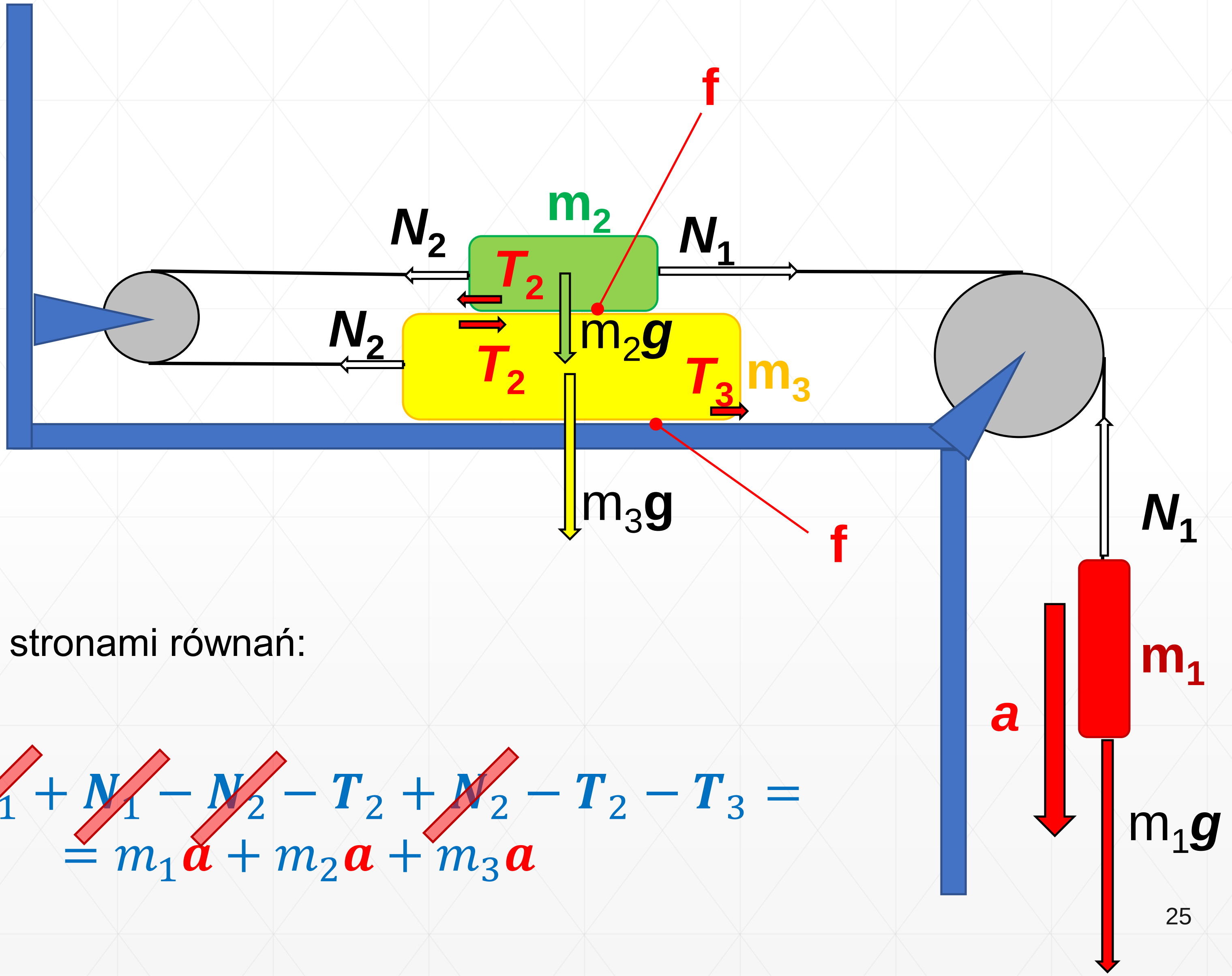
Tarcie wynika z sił nacisków i ze współczynników tarcia f:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_2 = m_2 \boldsymbol{g} f \\ \boldsymbol{T}_3 = (m_2 + m_3) \boldsymbol{g} f \end{cases}$$



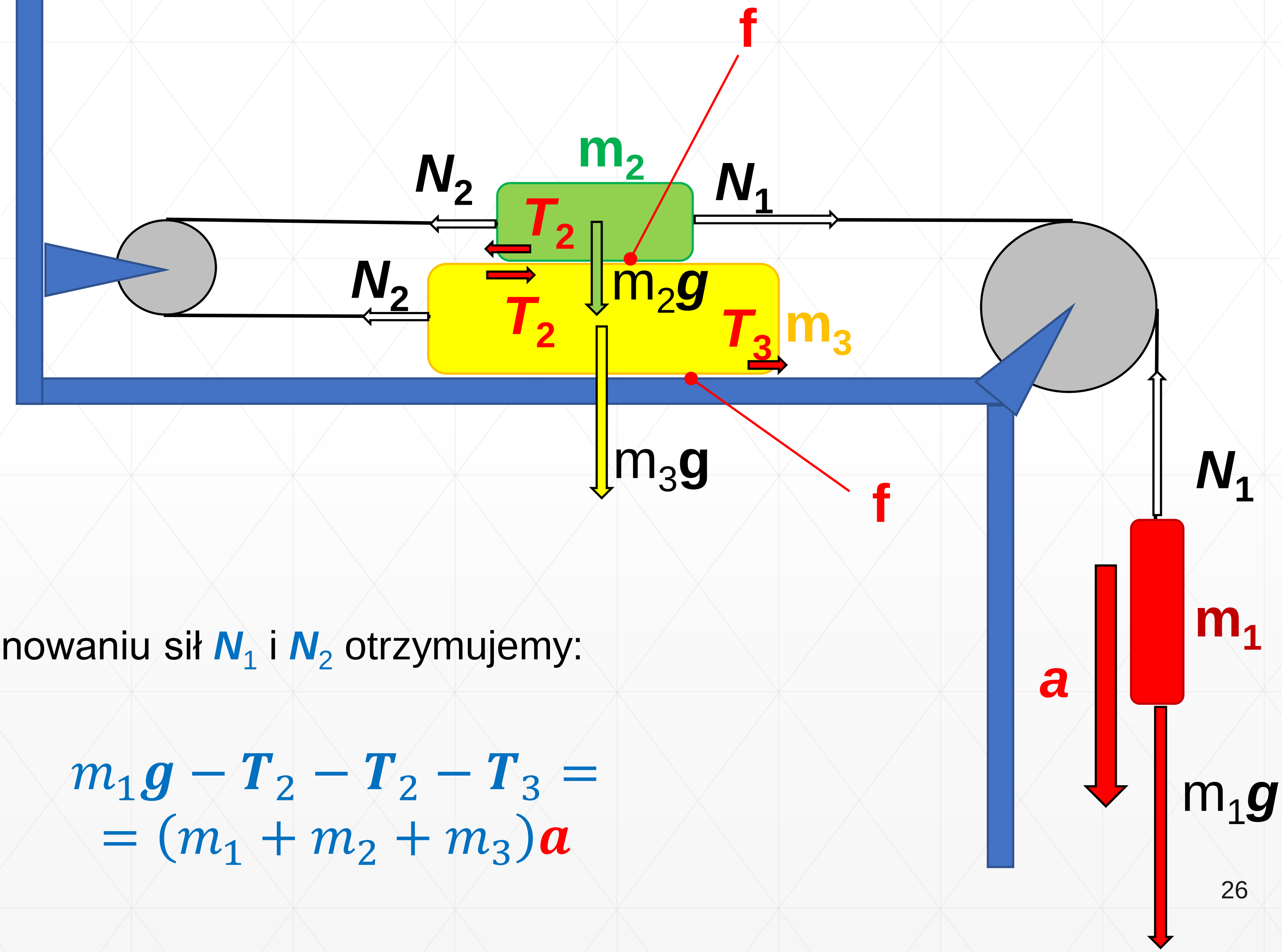
Równania ruchu dla wszystkich trzech mas mają postać:

$$\begin{cases} m_1\boldsymbol{g} - \boldsymbol{N}_1 = m_1\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{N}_1 - \boldsymbol{N}_2 - \boldsymbol{T}_2 = m_2\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{N}_2 - \boldsymbol{T}_2 - \boldsymbol{T}_3 = m_3\boldsymbol{a} \end{cases}$$



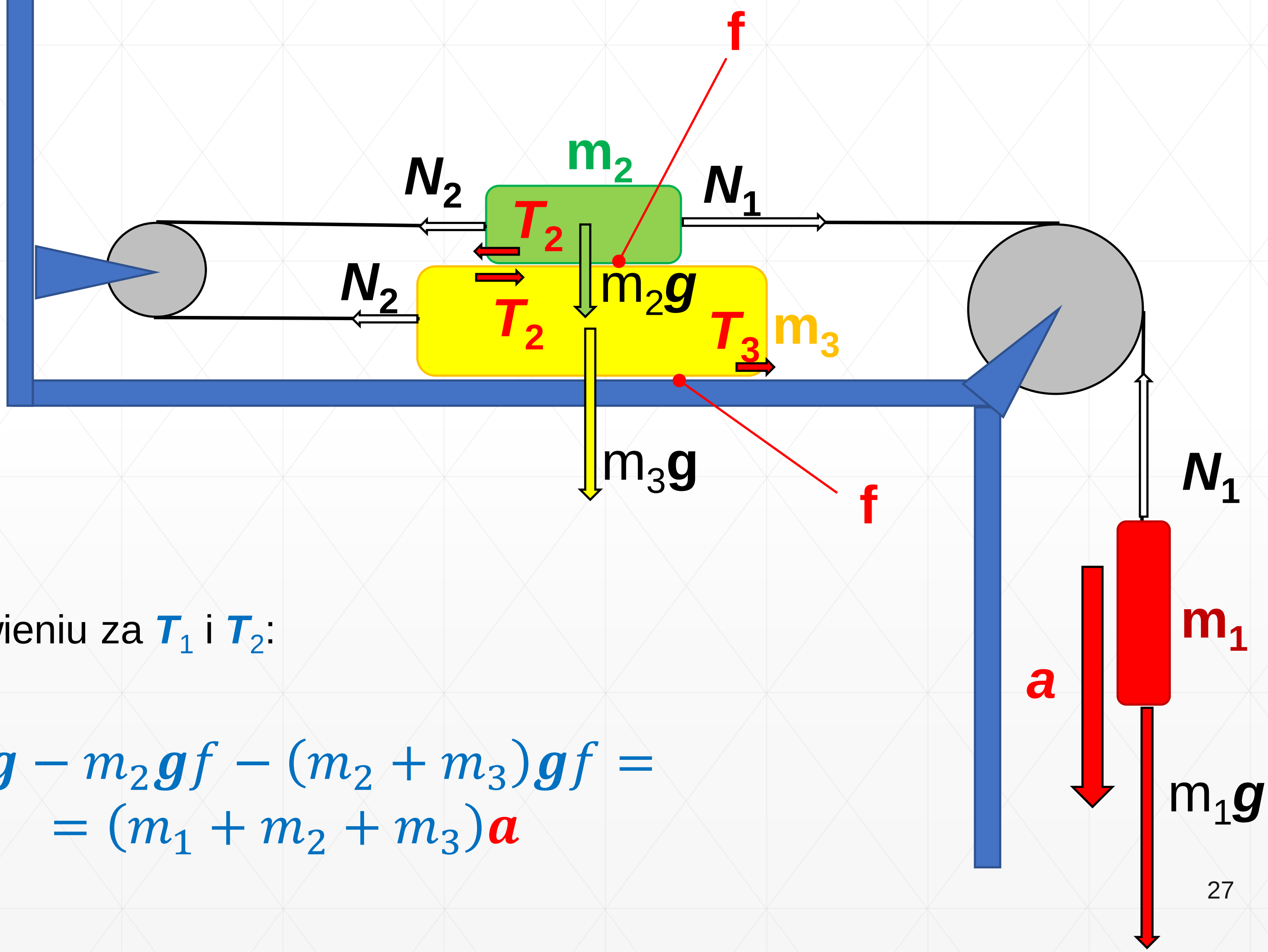
Po dodaniu stronami równań:

$$m_1 \boldsymbol{g} - \cancel{N_1} + \cancel{N_1} - \cancel{N_2} - T_2 + \cancel{N_2} - T_2 - T_3 =$$
$$= m_1 \boldsymbol{a} + m_2 \boldsymbol{a} + m_3 \boldsymbol{a}$$



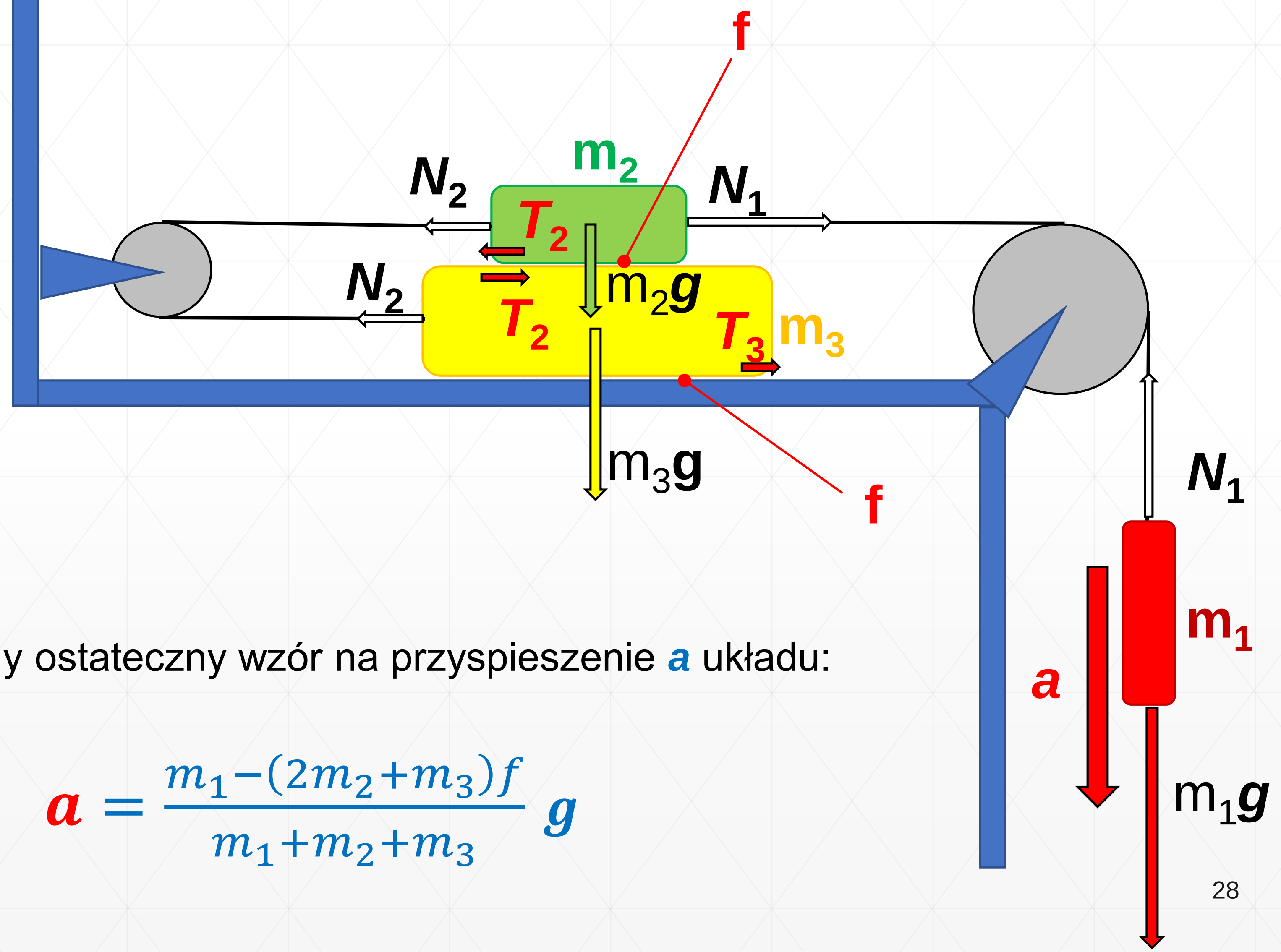
Po wyeliminowaniu sił $\boldsymbol{N}_1$ i $\boldsymbol{N}_2$ otrzymujemy:

$$m_1\boldsymbol{g} - \boldsymbol{T}_2 - \boldsymbol{T}_2 - \boldsymbol{T}_3 =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{a}$$



Po podstawieniu za $\boldsymbol{T}_1$ i $\boldsymbol{T}_2$:

$$m_1\boldsymbol{g} - m_2\boldsymbol{g}f - (m_2 + m_3)\boldsymbol{g}f =$$
$$= (m_1 + m_2 + m_3)\boldsymbol{a}$$



Otrzymujemy ostateczny wzór na przyspieszenie ***a*** układu:

$$a = \frac{m_1 - (2m_2 + m_3)f}{m_1 + m_2 + m_3}\, g$$

Rola zasad zachowania w mechanice

Zasady zachowania a symetria czasu i przestrzeni

Przez symetrię będziemy rozumieć taką operację (przekształcenie), po wykonaniu, której, cechy obiektu jej poddanej nie ulegają zmianie

Podstawowe operacje symetrii to ***translacje*** (przesunięcia), ***obroty*** i ***odbicia zwierciadlane***

Symetria przestrzeni względem translacji, oznacza, że żaden punkt przestrzeni nie jest wyróżniony - niezależnie od tego czy rozpatrujemy przebieg zjawiska fizycznego na odległej planecie, czy na Ziemi. Tę własność symetrii przestrzeni i czasu nazywamy ich ***jednorodnością.***

Symetria przestrzeni względem obrotów odpowiada równoważności wszystkich kierunków w przestrzeni - mówimy, że przestrzeń jest ***izotropowa***.

Jeżeli spełniona jest niezmienniczość praw fizyki względem pewnej transformacji, to poddając tej transformacji układ współrzędnych otrzymamy taki sam opis zjawisk.

Zasada zachowania energii wynika z jednorodności czasu

Zasada zachowania pędu wynika z jednorodności przestrzeni

Zasada zachowania momentu pędu wynika z izotropii przestrzeni