
5 7 2001

3. Dynamika bryły sztywnej

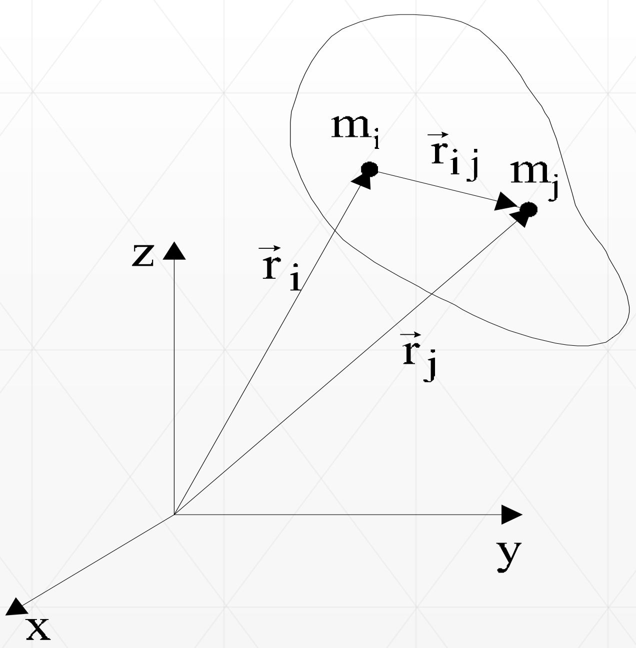
- ruch bryły sztywnej,
- środek masy,
- ruch w układzie środka masy,
- moment bezwładności,
- ruch obrotowy,
- twierdzenie Steinera,
- II zasada dynamiki ruchu obrotowego.

Model bryły sztywnej

Dotychczas opisywaliśmy ciało za pomocą ***modelu punktu materialnego***, który jest użyteczny, gdy **rozmiary ciała są znacznie mniejsze od odległości, z której opisujemy ruch**.

Teraz wprowadzimy kolejny model pozwalający uwzględnić nie tylko ruchy postępowe, ale także obrotowe ciała.

Bryła sztywna – ciało zajmujące pewną objętość w przestrzeni – ciągły układ punktów materialnych. Wzajemne odległości punktów bryły sztywnej nie zmieniają się pod wpływem działających sił. Bryła sztywna nie ulega więc odkształceniom.

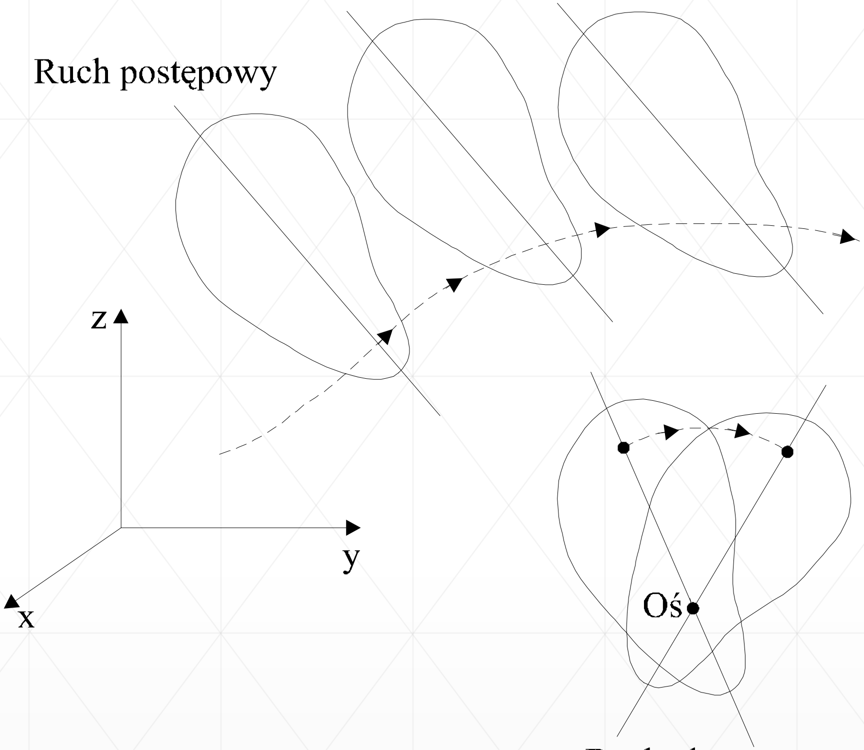


Odległość między punktami bryły wyznaczamy znając ich wektory wodzące w wybranym układzie współrzędnych:

$$|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| = |\boldsymbol{r}_{ij}| \qquad i, j = 1, 2, 3, \dots n$$

Wiele ciał rzeczywistych można traktować jako bryły sztywne, pod warunkiem, że działające siły są dostatecznie małe, by nie powodować odkształcenia ciała.

Ruch bryły sztywnej



Ruchem postępowym bryły sztywnej nazywamy taki ruch, w którym dowolna prosta przeprowadzona przez to ciało przesuwa się równolegle do samej siebie (**wektory prędkości wszystkich punktów ciała są w danej chwili jednakowe**).

Bryła sztywna porusza się ***ruchem obrotowym***, jeżeli wszystkie punkty ciała poruszają się po okręgach, których środki leżą na jednej prostej, którą nosi nazwę ***chwilowej osi obrotu***.

Jeżeli położenie osi obrotu nie zmienia się, to nosi ona nazwę ***stałej osi obrotu***.

Jest to oczywiście związane z definicją bryły sztywnej – odległości wzajemne między wszystkimi jej punktami pozostają stałe.

Środek masy

Momentem masowym pierwszego stopnia (momentem statycznym) S układu punktów materialnych względem dowolnego punktu O nazywamy sumę iloczynów mas punktów i ich wektorów wodzących względem punktu O układu współrzędnych:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \boldsymbol{r}_i$$

Jeżeli układ punktów jest ciągły i o stałej gęstości ρ, to:

$$\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m = \rho \iiint \boldsymbol{r}\mathrm{d}V,$$

gdzie $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ jest elementem objętości ciała.

Rozkładając równanie na moment statyczny względem kierunków kartezjańskiego układu współrzędnych znajdujemy składowe wektora ***S***:

$$\boldsymbol{S} = S_x\boldsymbol{i} + S_y\boldsymbol{j} + S_z\boldsymbol{k}$$

Suma iloczynów mas punktów i ich odległości od danej płaszczyzny nazywana jest ***momentem statycznym względem płaszczyzny***:

$$\boldsymbol{S}_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i; \qquad \boldsymbol{S}_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i\,; \qquad \boldsymbol{S}_{xz} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

Przez porównanie otrzymujemy równania wiążące składowe momentu statycznego względem punktu z odpowiednimi momentami statycznymi względem płaszczyzn:

$$\boldsymbol{S}_x = \boldsymbol{S}_{yz}; \quad \boldsymbol{S}_y = \boldsymbol{S}_{xz}; \quad \boldsymbol{S}_z = \boldsymbol{S}_{xy}$$

Zawsze istnieje taki punkt ciała C (***środek masy ciała***), w którym można skupić całą masę ciała bez zmiany charakteru ruchu:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Czyżbyśmy wracali do modelu punktu materialnego?

Wartość momentu statycznego dla środka masy wynosi: $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i = m\boldsymbol{r}_C$

Stąd można znaleźć położenie środka masy:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\boldsymbol{S}}{m} = \frac{\int_m \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$

Wnioski:

1. Moment statyczny względem płaszczyzny lub moment statyczny względem punktu będącego środkiem masy, przechodzącej przez środek masy jest równy zero.
2. Jeżeli ciało jednorodne posiada środek, oś lub płaszczyznę symetrii, to środek masy będzie znajdował się na tej płaszczyźnie, osi lub w tym środku symetrii.

Ruch w układzie środka masy

W ruchu postępowym prędkości wszystkich punktów bryły sztywnej, a zatem i środka masy *C*, są takie same, czyli:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$$

Oznaczając przez $\boldsymbol{r}_C$ promień wodzący środka masy, a przez $\boldsymbol{v}_C$ jego prędkość liniową dostajemy:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C$$

Wektor wodzący środka masy $\boldsymbol{r}_c$ jest związany z momentem statycznym bryły **S**:

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\boldsymbol{S}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i}{m} \qquad \text{a stąd} \qquad m\boldsymbol{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_C$$

Różniczkując (patrz KF-02) powyższe wyrażenie dwukrotnie po czasie otrzymamy:

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t^2} = m\boldsymbol{a}_C = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}$$

Uzyskaliśmy ***równanie ruchu postępowego bryły sztywnej*.**

Wszystkie punkty bryły poruszają się tak, jak jej środek masy, którego ruch można znaleźć znając wypadkową siłę działającą na bryłę oraz jej masę.

Pęd w ruchu postępowym bryły sztywnej

Pęd całej bryły jest równy sumie pędów poszczególnych jej punktów, czyli:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_C \sum_{i=1}^{n} m_i = m\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{p}_C$$

Pęd bryły sztywnej w ruchu postępowym jest **równy pędowi całkowitej masy** bryły **skupionej w jej środku masy**.

Moment pędu w ruchu postępowym bryły sztywnej

Moment pędu całej bryły jest sumą momentów pędów poszczególnych jej punktów, czyli:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_C) = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_C$$

Pierwszy czynnik jest ***momentem statycznym pierwszego stopnia S***:

$$\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{r}_C \times m\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}_C = \boldsymbol{L}_C$$

Moment pędu bryły sztywnej w ruchu postępowym jest równy momentowi pędu masy punktu materialnego umieszczonego w środku masy tej bryły.

Dla dowolnego punktu, względem którego obliczamy moment pędu w środku masy, moment pędu bryły sztywnej w ruchu postępowym względem środka masy jest równy zeru.

II zasada dynamiki dla momentu pędu (o tym za chwilę) ma postać d***L***/dt = ***M***, więc prawdziwy jest następujący warunek ruchu postępowego bryły sztywnej:

Wypadkowy moment sił względem środka masy w ruchu postępowym bryły sztywnej jest równy zeru.

Energia kinetyczna w ruchu postępowym bryły sztywnej

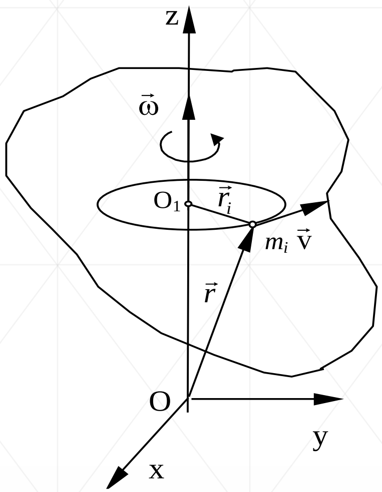
Energia kinetyczna bryły sztywnej jest sumą energii kinetycznych wszystkich punktów bryły:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_k^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_C^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{m v_C^2}{2}$$

Energia kinetyczna ruchu postępowego bryły sztywnej jest równa energii kinetycznej całkowitej masy bryły skupionej w środku masy.

Moment bezwładności

Dla obrotu wokół stałej osi obrotu bryły sztywnej, prędkość kątowa może ulegać zmianie co do modułu i zwrotu natomiast jej kierunek pozostaje stały.



Moment pędu cząstki względem pewnego punktu określiliśmy jako iloczyn wektorowy promienia wodzącego cząstki poprowadzonego z tego punktu przez pęd tej cząstki, zatem dla ruchu obrotowego:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times \boldsymbol{p}_i = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Big[m_i \boldsymbol{\omega} \underbrace{(\boldsymbol{r}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{r}_i)}_{r^2} - m_i \boldsymbol{r}_i \underbrace{(\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega})}_{0} \Big] = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} I_i \boldsymbol{\omega}$$

Moment bezwładności i-tego punktu materialnego $I_i = m_i r_i^2$

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

moment bezwładności układu punktów względem osi obrotu

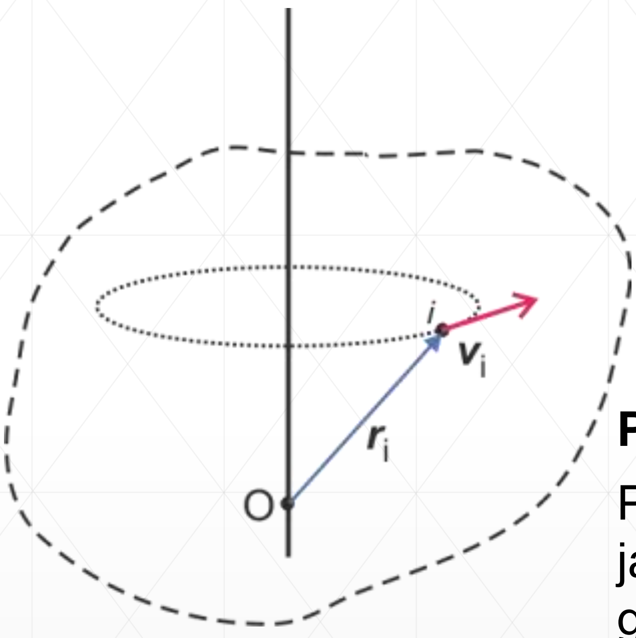
$$\boldsymbol{L} = I \boldsymbol{\omega}$$

Momentem bezwładności względem osi układu punktów materialnych lub ciała nazywamy sumę iloczynów mas i kwadratów ich odległości od wybranej osi obrotu.

$$I = \int_m r^2 dm = \rho \iiint_V r^2 \mathrm{d}V$$

Ruch obrotowy bryły sztywnej

Rozważmy ruch względem stałej osi przechodzącej przez środek układu inercjalnego o początku *O*. Prędkość liniowa *i*-tego punktu wynosi $\boldsymbol{v}_i$ oraz:



$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i$$

Ponieważ prędkość kątowa jest stała dla wszystkich punktów bryły (ruch punktów sztywno związanych względem stałej osi) to:

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i$$

Pęd bryły sztywnej w ruchu obrotowym

Pęd bryły sztywnej w ruchu obrotowym jest (podobnie jak w ruchu postępowym) równy sumie pędów poszczególnych punktów bryły:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\boldsymbol{\omega}_i \times r_i) = \boldsymbol{\omega} \times \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{S} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_C) = \boldsymbol{m}\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{p}_C$$

Pęd ruchu obrotowego bryły sztywnej jest równoważny pędowi masy bryły skupionej w jej środku masy C.

Jeżeli oś obrotu przechodzi przez środek masy bryły, to pęd w układzie związanym ze środkiem masy jest równy **zero** ponieważ moment statyczny $\boldsymbol{S} = 0$.

Można zatem sformułować następujące twierdzenie:

Suma pędów wszystkich punktów bryły sztywnej w ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy bryły jest równa zeru.

Energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły sztywnej

Energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły sztywnej jest oczywiście sumą energii kinetycznych poszczególnych punktów bryły, czyli:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_k^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i)^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i)(\boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_i)}{2}$$

Wykorzystując tożsamość wektorową $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$, w której:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\omega}; \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}_i; \quad \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

otrzymujemy ogólny wzór na energię kinetyczną bryły sztywnej:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)]}{2} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \sum_{i=1}^{n} [\boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)] =$$

$$= \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = \frac{\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}}{2}$$

Twierdzenie Steinera

Twierdzenie Steinera dla momentów bezwładności:

Momenty bezwładności względem osi nieprzechodzących przez środek masy ciała można obliczyć według następującej formuły:

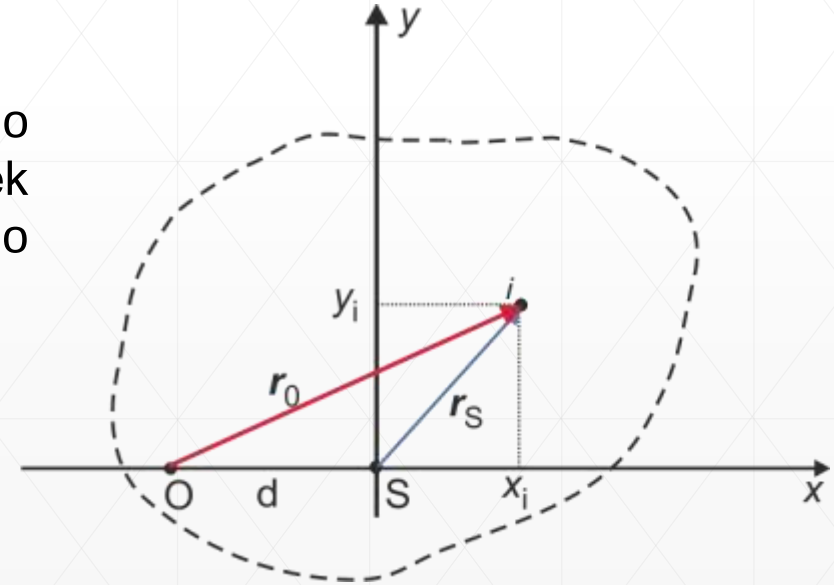
$$I = I_c + md^2$$

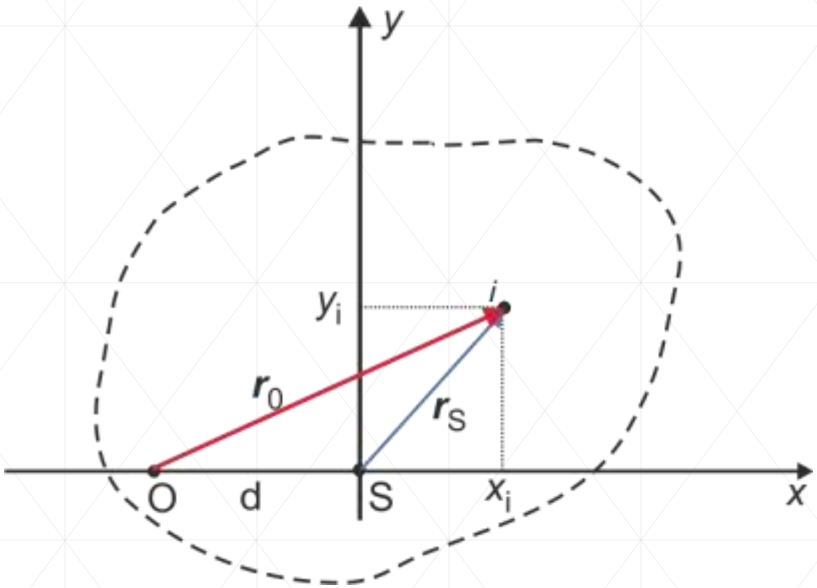
gdzie I_C jest momentem bezwładności względem osi równoległej do rozpatrywanej i przechodzącej przez środek masy, d jest zaś odległością środka masy od osi.

Dowód:

S – punkt przecięcia płaszczyzną rysunku osi do niej prostopadłej i przechodzącej przez środek masy *C*, *O* – punkt przecięcia osi równoległej do tamtej i znajdującej się w odległości *d* od niej.

Niech r_s jest odległością *i*-tego punktu o masie m_i od osi przechodzącej przez *C* ($r_s = r_C$), a r_0 – jego odległością od drugiej osi.





Długość wektorów wodzących wyznaczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$r_C^2 = x_i^2 + y_i^2$$

$$r_O^2 = (d + x_i)^2 + y_i^2 = d^2 + 2dx_i + x_i^2 + y_i^2$$
$$= d^2 + 2dx + r_C^2$$

Moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez O wynosi zatem:

$$I = \sum m_i r_i^2 = d^2 \sum m_i + 2d \sum m_i x_i + \sum m_i r_C^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = m$$

masa ciała

$$\sum m_i x_i = 0$$

dla środka masy

$$\sum m_i r_C^2 = I_C$$

moment bezwładności ciała względem osi przechodzącej przez środek masy

Ostatecznie otrzymujemy zatem zależność wyrażającą **twierdzenie Steinera**:

$$I = I_C + md^2$$

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego

Dla każdego punktu bryły, spełniona jest II zasada dynamiki w postaci ogólnej:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_i$$

(Mnożąc wektorowo II zasadę dla punktu materialnego przez wektor wodzący tego punktu)

A wobec tego całkowity moment sił względem punktu *O* działający na bryłę jest równy sumie momentów sił względem tego punktu działających na każdy punkt bryły, czyli:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{L}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$$

Dla dowolnego ruchu obrotowego można zatem zapisać II zasadę dynamiki w następującej postaci ogólnej:

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$$

Podobnie jak w przypadku ruchów postępowych z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego można wyprowadzić I zasadę która stwierdza, iż dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dla której moment siły jest zerowy moment pędu jest stały.

a ponieważ $\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$ zatem

Podsumowanie

Dynamika bryły sztywnej musi uwzględniać rozmiary ciała oraz rozkład przestrzenny masy ciała, czyli jego kształt, a także punkt przyłożenia siły wywołującej ruch względem środka masy bryły.

Dlatego zamiast siły ***F*** oraz masy *m* do opisu II zasady dynamiki stosujemy odpowiednio moment siły ***M*** (uwzględniający punkt przyłożenia siły) oraz moment bezwładności ***I*** (uwzględniający rozkład masy bryły).

Ruch bryły sztywnej może być traktowany jako kombinacje ruchu postępowego oraz obrotowego

Dla ruchu postępowego najlepiej jest wykorzystać pojęcie środka masy (punktu w którym podparcie bryły nie powoduje jej ruchu)

Dla ruchu obrotowego względem stałej osi obrotu wprowadzane jest pojęcie momentu bezwładności – wówczas II zasada dynamiki ma postać jak dla punktu materialnego z zastąpieniem przyspieszenia liniowego przez przyspieszenie kątowe, siły przez moment siły, masy przez moment bezwładności oraz pędu przez moment pędu.

Twierdzenie Steinera pozwala na wyrażenia momentu pędu bryły dla dowolnej osi


5 7 2001