Jucatan, Mexico, February 2005

Podstawy Akustyki

- Drgania normalne a fale stojące
- Składanie fal harmonicznych:
  - prędkość grupowa,
  - dyspersja fal,
  - superpozycja Fouriera,
  - paczka falowa
- Fale akustyczne w powietrzu
- Efekt Dopplera

Drgania normalne a fale stojące

$$\Psi(x,t) = A(x)\cdot\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{d x^2}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} + \frac{\omega^2}{\mathrm{v}^2}A = 0 \Rightarrow \frac{d^2A}{dx^2} + k^2 A = 0$$

$$A(x) = A_o\cdot\cos(k\,x + \phi)$$

$gdzie \quad k = \omega/\mathrm{v_f} \quad - liczba\ \ falowa$

rozwiązaniem jest funkcja o okresie przestrzennym zwanym długością fali -λ

$$k\,\lambda = 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}\mathrm{v_f} = \frac{2\pi}{2\pi\nu}\mathrm{v_f} = \frac{\mathrm{v_f}}{\nu}$$

$$\Psi(x,t) = A_o\cos(kx + \phi)\cdot\cos(\omega t + \varphi)$$

Drganiom normalnym w układach ciągłych odpowiada powstanie w nich fal stojących

Drgania własne struny (T – naciąg, μ – gęstość liniowa)

$$\Psi(x,t) = A_o \cos(kx + \phi)\cdot\cos(\omega t + \varphi)$$

dla struny o skończonej długości L zamocowanej na obu końcach

$$\boxed{\Psi(0,t) = \Psi(L,t) = 0}$$ z WB wynika

$$\boxed{A_o \cos(\phi)\cdot\cos(\omega t + \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \pm\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{A_o \cos\left(kL + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\omega t + \varphi) = 0}$$

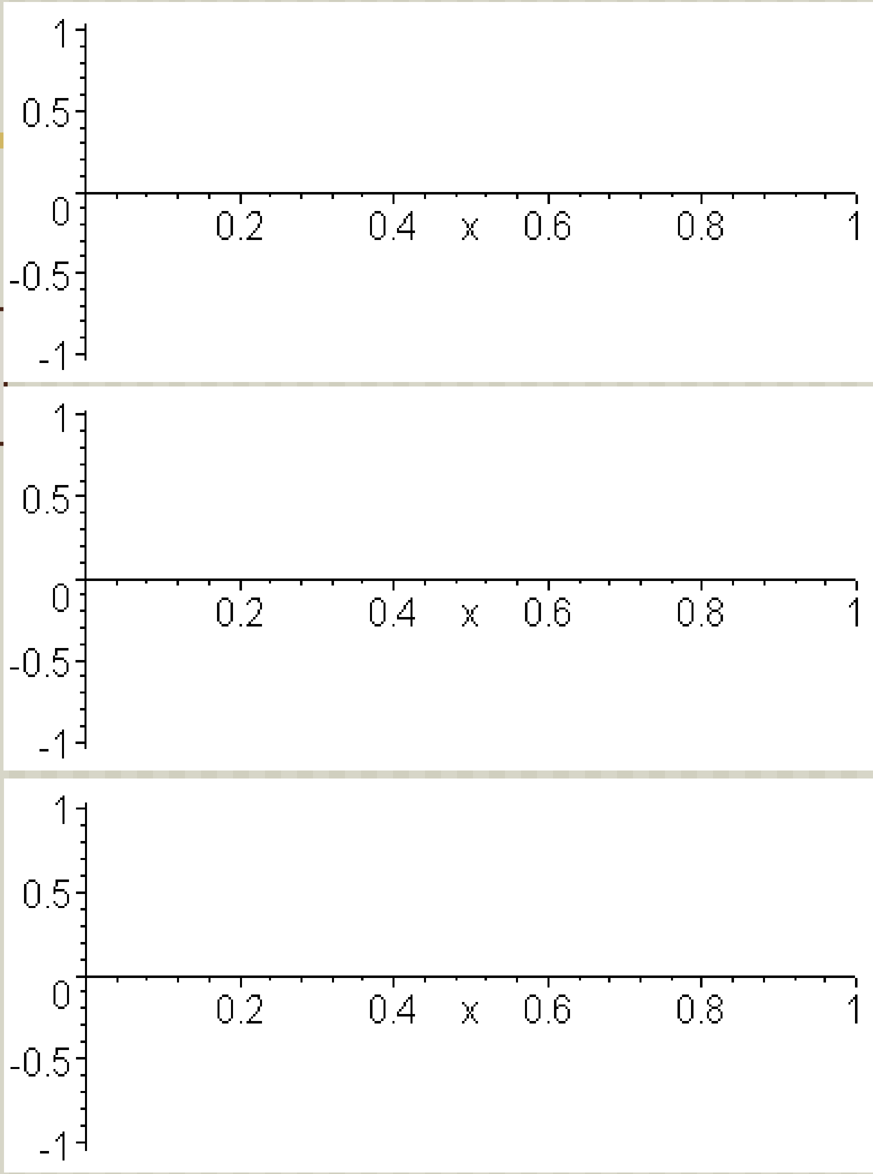
$$\boxed{\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi}$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \qquad n = 0,1,2\ldots}$$

$$\omega_n = k_n\sqrt{\frac{T}{\mu}} = n\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

podstawowa częstość kołowa



Składanie fal harmonicznych

Dwie fale biegnące w tym samym kierunku

$$y' = Y\,sin(\omega' t - k' x); \quad y'' = Y\,sin(\omega'' t - k'' x)$$

$$y_W = y' + y'' = 2Y \sin\alpha \cos\beta$$

$$\alpha = \frac{(\omega' + \omega'')t - (k' + k'')x}{2}; \ \beta = \frac{(\omega' - \omega'')t - (k' - k'')x}{2}$$

Załóżmy, że

$$\omega' = \omega + d\omega; \quad \omega'' = \omega - d\omega; \quad k' = k + dk; \quad k'' = k - dk$$

$$\Psi \equiv y_w = 2Y \cos(d\omega t - dkx)\sin(\omega t - kx)$$

Symulacja F-09

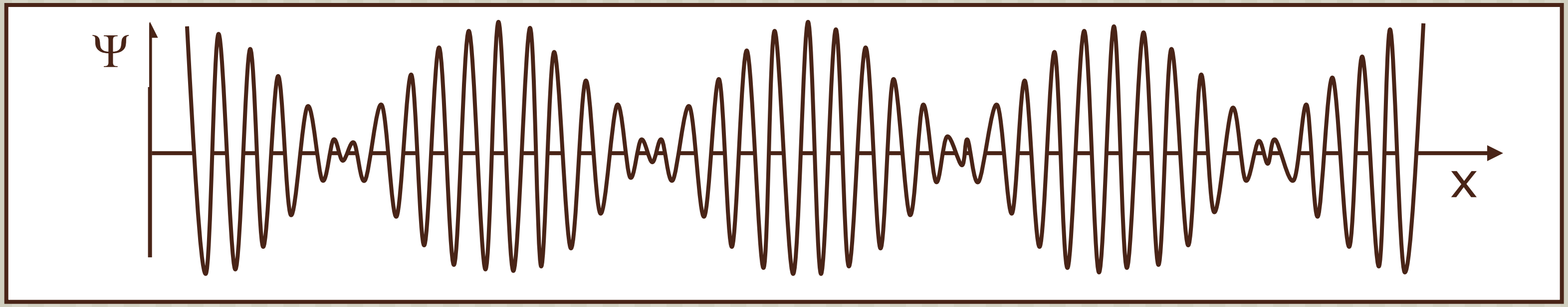
$$d\omega \cdot t - dk \cdot x = const$$

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

- prędkość grupowa

$$d\omega \cdot dt - dk \cdot dx = 0$$

w wyniku superpozycji dwóch fal otrzymaliśmy fale harmoniczną o częstości nośnej ω i modulowanej amplitudzie przenoszonej z prędkością grupową v_g



Dyspersja fal

szukamy związku pomiędzy prędkością grupową a fazową

$$\mathrm{v_f} = \frac{\omega}{k}$$

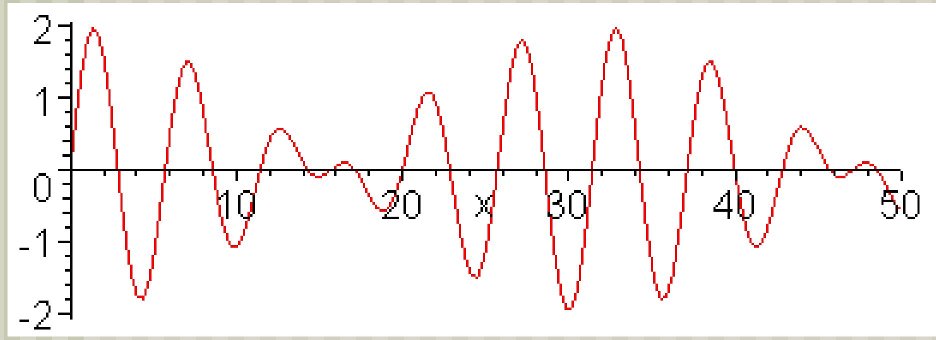
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dk\mathrm{v_f}}{dk} = \mathrm{v_f} + k\frac{d\mathrm{v_f}}{dk}$$

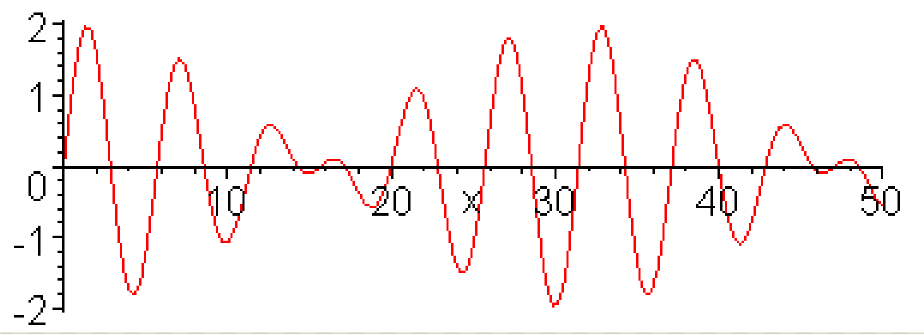
$$dk = d\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$$

$$\mathrm{v}_g = \mathrm{v_f} - \lambda\frac{d\mathrm{v_f}}{d\lambda}$$

prędkością grupową różni się od fazowej, gdy prędkość fazowa zależy od częstości (długości fali). Zależność v od λ nazywamy **dyspersją**.

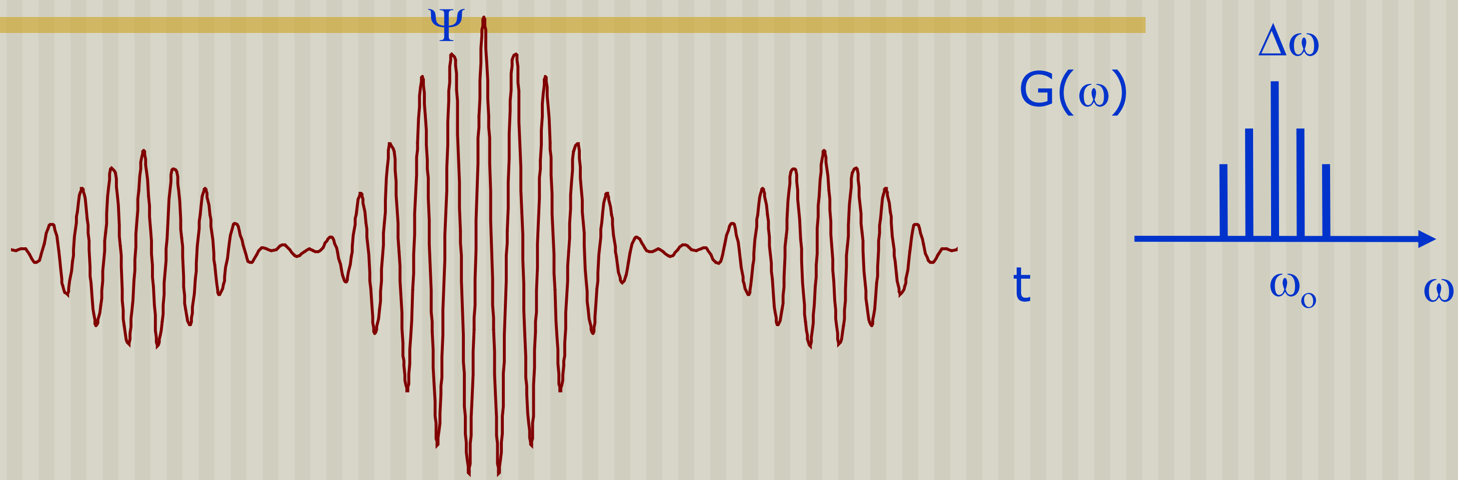
- ośrodki dyspersyjne – ($\mathrm{v_f} \neq \mathrm{v_g}$) fale o różnej długości rozchodzą się z różną prędkością, np. pryzmat dla światła
- ośrodki niedyspersyjne – ($\mathrm{v_f} = \mathrm{v_g}$) fale o różnej długości rozchodzą się z taką samą prędkością, np. w próżni



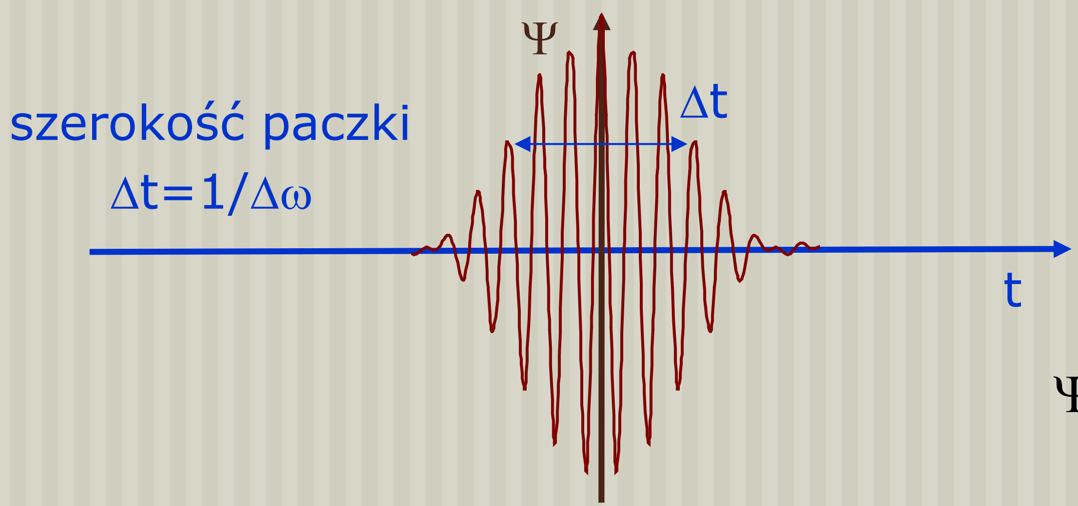


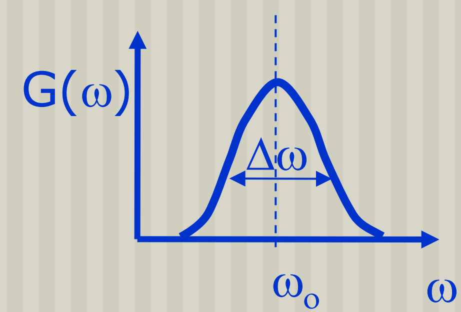
Superpozycja Fouriera

Dodając większą liczbę fal o częstościach bliskich ω_o boczne dudnienia ulegają stłumieniu. Poniżej wykres dla sumy 5 fal.



Przy sumowaniu nieskończonej liczby fal o częstościach bliskich ω_o i amplitudach opisanych funkcją Gaussa otrzymujemy pojedynczą paczkę falową



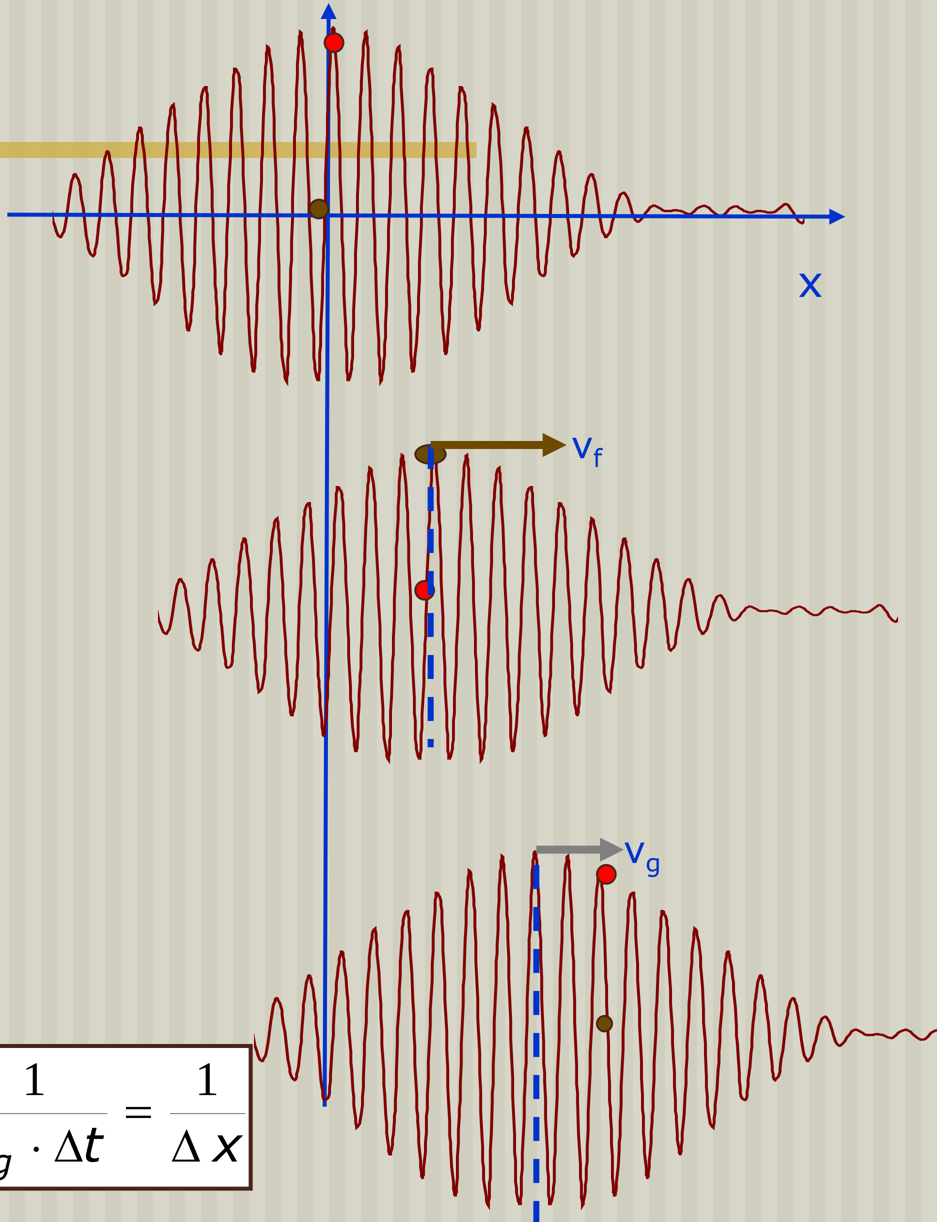


$$\Psi(t) = \int_0^\infty G(\omega)\cos \omega t \, d\omega$$

Prędkość grupowa, a prędkość fazowa paczki falowej

Paczka falowa

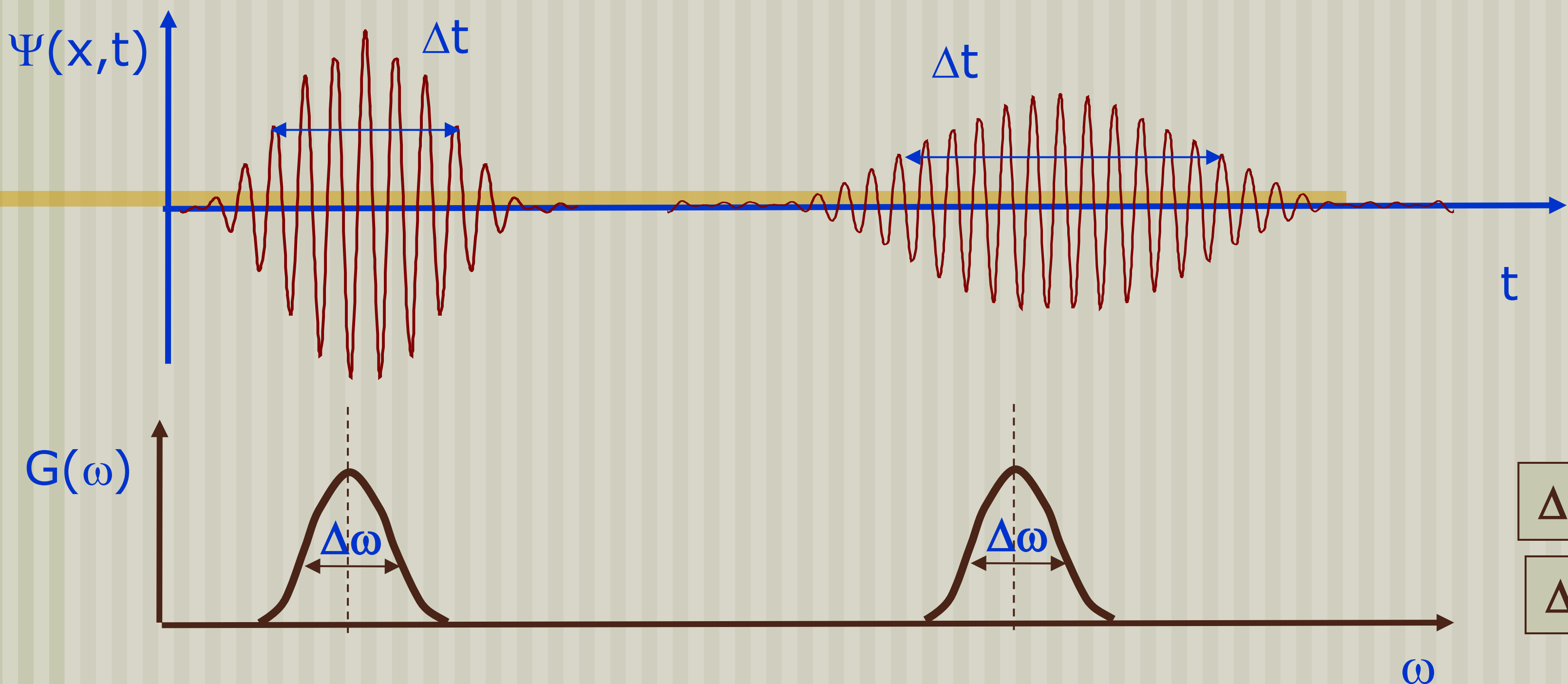
- w praktyce posługujemy się skończonymi ciągami falowymi tzw. paczkami falowymi
- paczka falowa powstaje w wyniku superpozycji fal harmonicznych o częstościach z przedziału $\Delta\omega$ i amplitudach opisanych funkcją Gaussa
- im mniejsze $\Delta\omega$ tym bardziej paczka falowa rozmyta jest w czasie
- paczka falowa rozchodzi się z prędkością grupową
- danej paczce falowej przyporządkowujemy odpowiednie pasmo liczb falowych Δk



$$\Delta k = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)\Delta\omega = \frac{\Delta\omega}{v_g} = \frac{1}{v_g \cdot \Delta t} = \frac{1}{\Delta x}$$

L.R. Jaroszewicz

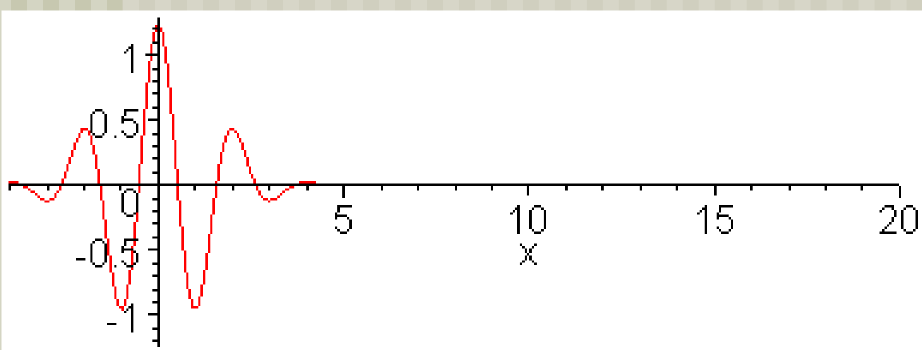
Rozmycie paczki falowej w ośrodku dyspersyjnym

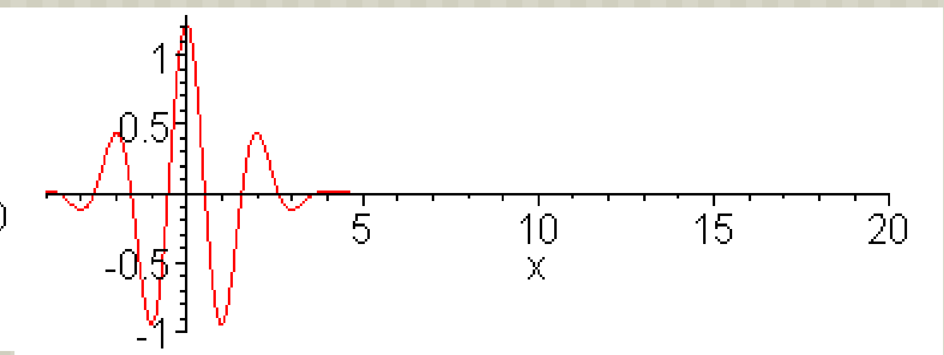


$\Delta\omega \cdot \Delta t > 1$

$\Delta k \cdot \Delta x > 1$

- w ośrodku dyspersyjnym paczka falowa ulega deformacji (rozmyciu), gdyż poszczególne składowe propagują się z różnymi prędkościami
- w ośrodku niedyspersyjnym paczka falowa nie ulega rozmyciu

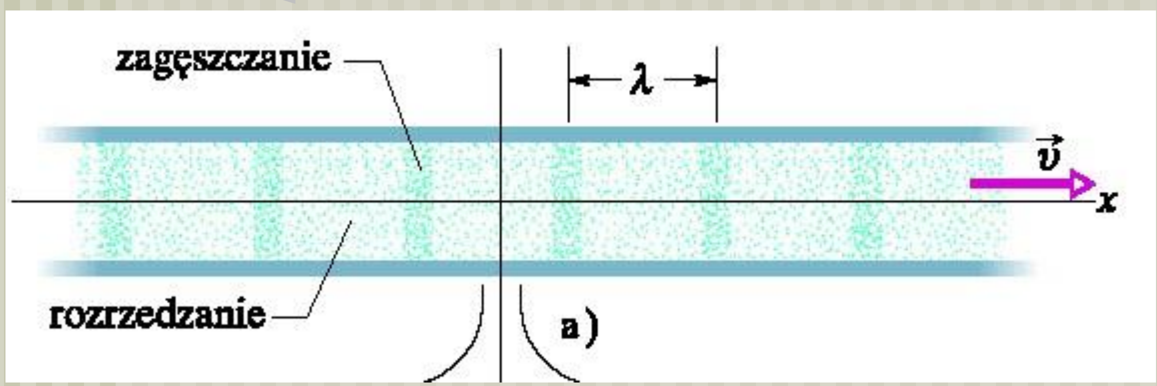




Fale akustyczne

Fale akustyczne w powietrzu są przykładem fal podłużnych polegających na rozchodzeniu się zagęszczeń i rozrzedzeń powietrza

lokalny ruch cząsteczek → zmiana gęstości gazu → zmiana ciśnienia gazu → nierównomierny rozkład ciśnienia → lokalny ruch cząsteczek



$$\boxed{s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx)}$$

amplituda przemieszczeń

$$\boxed{\Delta p(x,t) = \Delta p_0 \sin(\omega t - kx)}$$

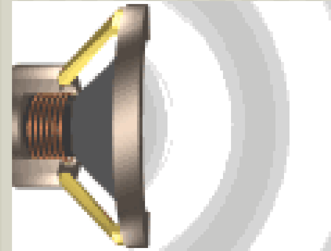
amplituda zmian ciśnienia

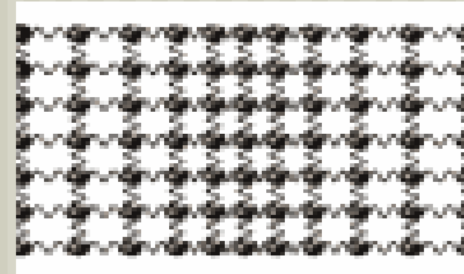
Z drugiej zasady dynamiki $F=ma=\Delta p_0 S$

$$\boxed{\Delta p_0 = m\frac{a}{S} = \left\{\begin{matrix} m \equiv \rho \mathrm{v} \Delta t S \\ a \equiv \Delta \mathrm{v}/\Delta t \end{matrix}\right\} = \rho \mathrm{v} \Delta \mathrm{v}}$$

a jest opóźnieniem elementu po wejściu do strefy zagęszczania, m masą przemieszczaną przez powierzchnię S w czasie Δt w ruchu falowym.

Fale dźwiękowe (akustyczne)





- dźwięki to podłużne fale sprężyste rozchodzące się w ciałach stałych, cieczach i gazach o częstotliwościach od 20 Hz (infradźwięki) do 20 KHz (ultradźwięki),
- prędkość dźwięku $v = \sqrt{B/\rho}$ B - moduł ściśliwości , ρ - gęstość ośrodka

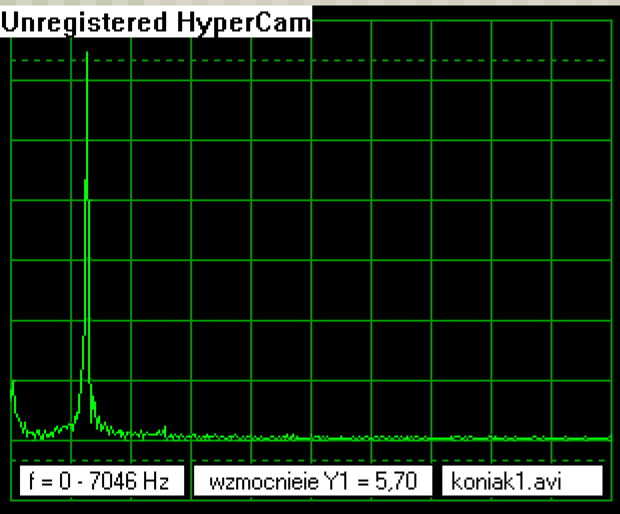
  powietrze 340 m/s, woda 1500 m/s, stal 6000 m/s
- w powietrzu prędkość dźwięku zależy od ciśnienia $pV^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma}$

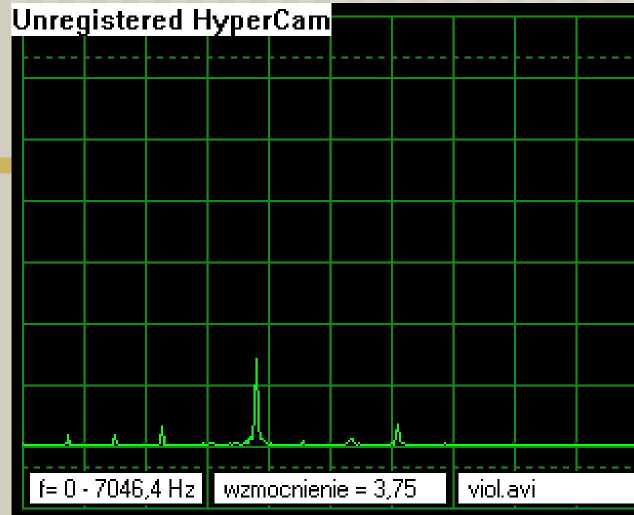
  $v = \sqrt{\gamma p_0 / \rho}$ gdzie γ stała przemiany adiabatycznej

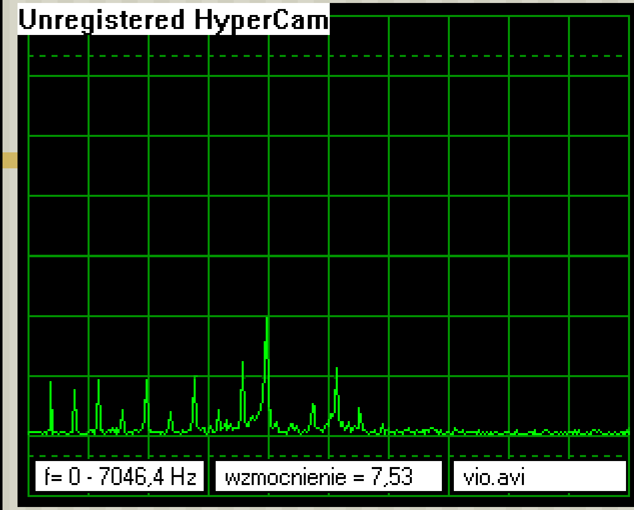
  ton –fala harmoniczna o określonej częstotliwości,

  wysokość dźwięku – jego częstotliwość,
  barwa – zbiór fal o różnych częstotliwościach,
  natężenie – moc na jednostkę powierzchni, ~ A^2 i ω^2
- **głośność** - poziom natężenia dźwięku $10\log(I/I_o)$ [dB] gdzie $I_o = 10^{-12}$ W/m^2 to natężenie odniesienia - dolna granica słyszalności (granica bólu 120 dB)

Analiza harmoniczna dźwięków

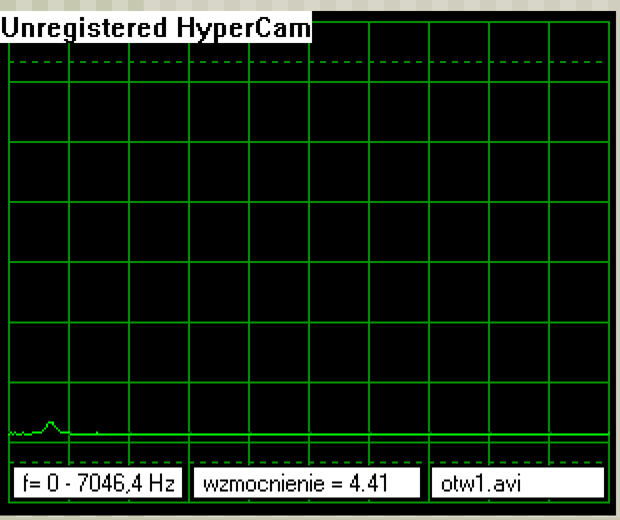


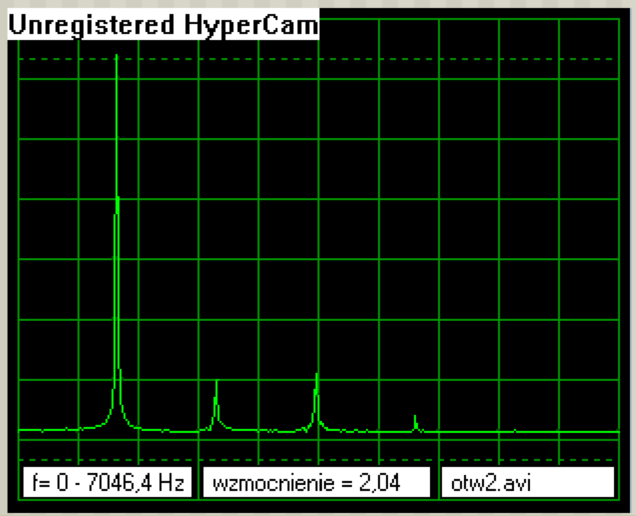


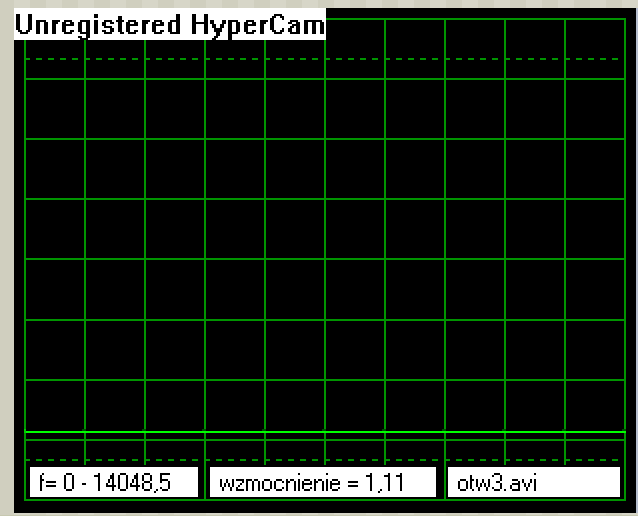


widmo kieliszka ω=900 Hz

dobre skrzypce – bogaty bukiet harmoniczny, zły gracz



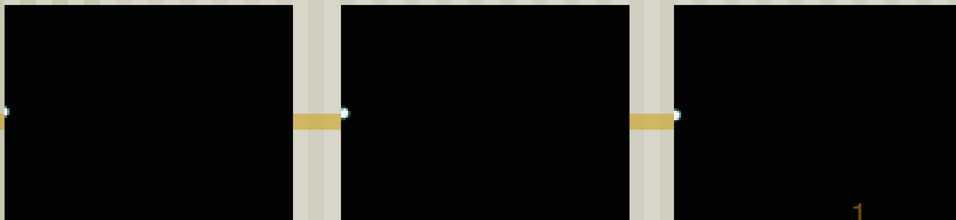




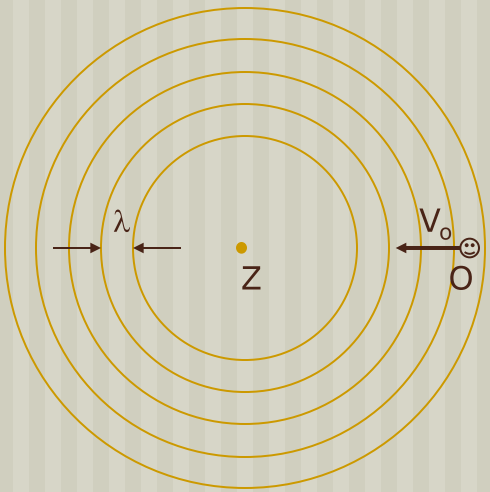
widmo fletu przy słabym zadęciu, silniejszym i najsilniejszym: wzrost najniższej częstotliwości od 587Hz, 1175Hz do 1765Hz ale dominuje nieharmoniczna 2720Hz;

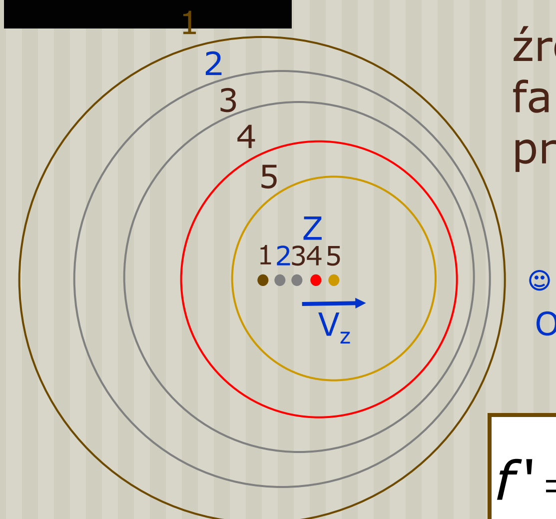
Efekt Dopplera dla fal sprężystych

Zmiana częstości wynikająca z wzajemnego ruchu obserwatora O i źródła Z



Symulacja |F-10





źródło zbliża się do obserwatora fala ma mniejszą długość z przodu, a większą z tyłu

$$\lambda' = \frac{u}{f} - \frac{v_z}{f}$$

$$f' = \frac{u}{\lambda'} = \frac{uf}{u - v_z} = f\,\frac{1}{1-\left(v_z/u\right)}$$

zbliżający się obserwator odbiera fale o większej częstotliwości

gdy prędkość źródła większa jest od prędkości dźwięku powstaje fala uderzeniowa

$$f' = \underbrace{\left(\frac{ut}{\lambda} + \frac{v_o t}{\lambda}\right)}_{\text{liczba rejestrowanych fal w czasie t}}\frac{1}{t} = \frac{u+v_o}{\lambda} = \frac{(u+v_o)f}{u} = f\left(1+\frac{v_o}{u}\right)$$

$$M = \sin\theta = \frac{v_Z}{u}$$

liczba Macha

Jucatan, Mexico, February 2005