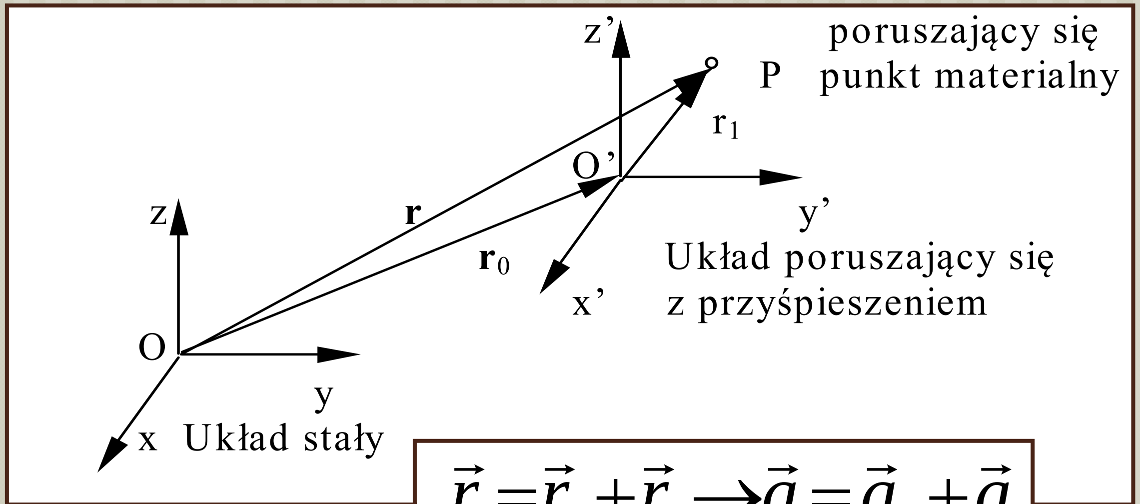
Singapore, Singapore, Febuary 2014

Nieinercjalne układy odniesienia

- Nieinercjalny układ odniesienia w ruchu postępowym. Siła bezwładności
- Nieinercjalny układ odniesienia w ruchu postępowym i obrotowym. Prędkość i przyspieszenie
- Siła bezwładności w wirującym układzie odniesienia

Nieinercjalny układ odniesienia w ruchu postępowym, siła bezwładności

Układ O' porusza się ruchem postępowym ze zmienną prędkością tzn. z pewnym przyśpieszeniem a_0



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a} - \vec{a}_0$$

$$m\vec{a}_1 = m\vec{a} - m\vec{a}_0 \quad \rightarrow \quad \vec{F}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_0$$

W układzie nieinercjalnym pojawia się dodatkowa siła związana z przyśpieszeniem samego układu odniesienia zwana **siłą bezwładności** lub **siłą oporu bezwładnego**.

$$\vec{F}_b = -m\vec{a}_0$$

Gdy układ poruszający się **związany jest sztywno** z punktem materialnym poruszającym się z przyśpieszeniem $\vec{a}$ wówczas $\vec{a}_0 = \vec{a}$ stąd siła działająca na punkt materialny w tym układzie wyniesie:

$$\boxed{\vec{F}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_0 = m\vec{a} - m\vec{a} = 0}$$

Przykład: Ważenie ciężarka w windzie na wadze sprężynowej.

W spoczynku i w ruchu jednostajnym windy ciężarek działa na szalkę wagi siłą ***G=mg***.

Natomiast w ruchu niejednostajnym (ruszanie lub hamowanie windy) odważnik zadziała na szalkę wagi siłą

$$\vec{F}_1 = \vec{G} - m\vec{a} = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

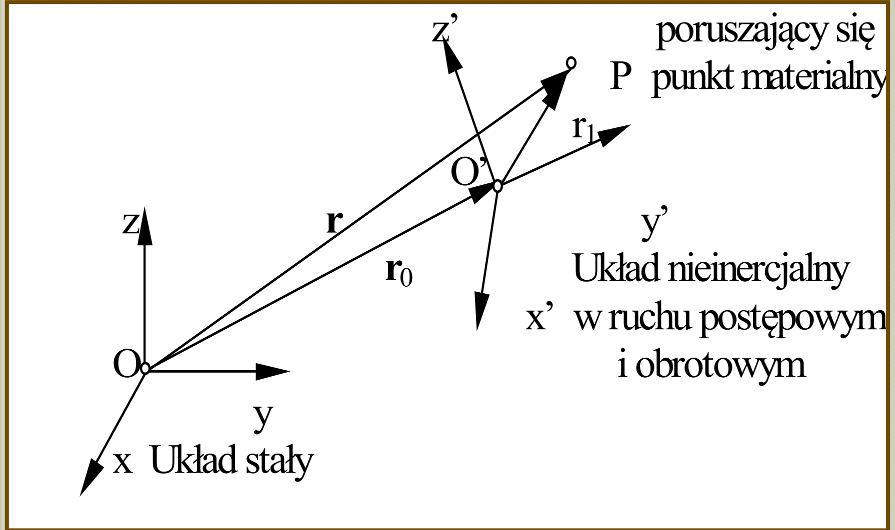
Dla rozpoczęcia ruchu w górę oraz dla hamowania w ruchu w dół **wektor *a* jest przeciwnie skierowany niż wektor g** stąd wartość bezwzględna siły

$$\boxed{F_1 = m(g + a) = G + ma}$$

Przy rozpoczynaniu jazdy w dół i hamowaniu w trakcie jazdy do góry **kierunek wektora *a* jest zgodny z kierunkiem wektora *g*** i teraz wartość bezwzględna siły działającej na ciężarek wyniesie.

$$\boxed{F_1 = m(g - a) = G - ma}$$

Nieinercjalny układ odniesienia w ruchu postępowym i obrotowym



$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_1$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt}$$

Wektor położenia punktu P zależy od czasu nie tylko poprzez zależność od czasu swoich składowych x'(t), y'(t), z'(t) w ruchomym układzie odniesienia O' ale również poprzez zależność od czasu wersorów osi tego będącego w ruch układu

$$\vec{i}\,(t), \vec{j}\,(t), \vec{k}\,(t)$$

$$\vec{r}_1 = x'(t)\vec{i}\,(t) + y'(t)\,\vec{j}\,(t) + z'(t)\vec{k}\,(t)$$

Jeśli odbywa się jednocześnie ruch postępowy i obrotowy układu O' z prędkością kątową ω:

$$\frac{d\vec{i}\,(t)}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}\,; \quad \frac{d\vec{j}\,(t)}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}\,; \quad \frac{d\vec{k}\,(t)}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}$$

Prędkość

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt}=\frac{dx'(t)}{dt}\vec{i}(t)+\frac{dy'(t)}{dt}\vec{j}(t)+\frac{dz'(t)}{dt}\vec{k}(t)+x'(t)\frac{d\vec{i}(t)}{dt}+y'(t)\frac{d\vec{j}(t)}{dt}+z'(t)\frac{d\vec{k}(t)}{dt}$$

Pierwsze trzy wyrazy stanowią prędkość punktu materialnego w ruchomym układzie odniesienia (prędkość względna) .

$$\frac{dx'(t)}{dt}\vec{i}(t)+\frac{dy'(t)}{dt}\vec{j}(t)+\frac{dz'(t)}{dt}\vec{k}(t)=\vec{v}'$$

Ostatnie trzy wyrazy stanowią prędkość obrotową ruchomego układu odniesienia O' w punkcie P.

$$x'(t)\vec{\omega}\times\vec{i}+y'(t)\vec{\omega}\times\vec{j}+z'(t)\vec{\omega}\times\vec{k}=\vec{\omega}\times(x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k})=\vec{\omega}\times\vec{r}_1$$

Ostatecznie prędkość punktu materialnego w stałym układzie odniesienia:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}_0}{dt}+\frac{d\vec{r}_1}{dt}=\vec{v}_0+\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}_1$$

$$\vec{v}_0=\frac{d\vec{r}_0}{dt} \qquad \vec{v}'=\frac{d\vec{r}_1}{dt} \qquad \vec{\omega}\times\vec{r}_1$$

Translacyjna | prędkość pkt. P w O' | obrotowa O'

Prędkość punktu materialnego poruszającego się w układzie nie-inercjalnym liczona w wybranym stałym (inercjalnym) układzie odniesienia jest sumą prędkości unoszenia i prędkości względnej.

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}_u+\vec{v}' \qquad \vec{v}_u=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}_1}$$

Przyspieszenie

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r}_1 + \vec{v}'$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_1 + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

Przyśpieszenie punktu materialnego w układzie ruchomym O' pojawiające się wskutek przyśpieszenia kątowego układu O' względem układu stałego O

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_1 = \vec{\varepsilon}\times\vec{r}_1$$

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Przyśpieszenie ruchu postępowego początku układu O' w ruchu translacyjnym

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{a}_0$$

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\mathbf{v}}_1 = \vec{\omega}\times\vec{r}_1 + \vec{\mathbf{v}}'$$

$$\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{\omega}\times(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}_1) + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1) + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}'_x\vec{i} + \mathbf{v}'_y\vec{j} + \mathbf{v}'_z\vec{k}\right) =$$

$$= a'_x\vec{i} + a'_y\vec{j} + a'_z\vec{k} + \mathbf{v}'_x\frac{d\vec{i}}{dt} + \mathbf{v}'_y\frac{d\vec{j}}{dt} + \mathbf{v}'_z\frac{d\vec{k}}{dt} =$$

$$= \vec{a}' + \mathbf{v}'_x\vec{\omega}\times\vec{i} + \mathbf{v}'_y\vec{\omega}\times\vec{j} + \mathbf{v}'_z\vec{\omega}\times\vec{k} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{\mathbf{v}}'$$

Teraz możemy przyśpieszenie $\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d\vec{v}_0}{dt}+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}_1+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\vec{v}'}{dt}$ przedstawić w postaci

$$\boxed{\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_1+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1)+\vec{a}'}$$

Korzystając z zależności $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\equiv(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ możemy napisać

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1)=\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times(\vec{r}_{1\parallel\vec{\omega}}+\vec{r}_{1\perp\vec{\omega}})]=\underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{1\parallel\vec{\omega}})}_{=0}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{1\perp\vec{\omega}})=\underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{1\perp\vec{\omega}})\vec{\omega}}_{=0}-(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}_{1\perp\vec{\omega}}=-\omega^2\vec{r}_{1\perp\vec{\omega}}=-\omega^2\vec{r}_1$$

$$\boxed{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_1)=-\omega^2\vec{r}_1=\vec{a}_{do}}$$

jest przyśpieszeniem dośrodkowym

Ostatecznie przyśpieszenie P liczone w układzie stałym

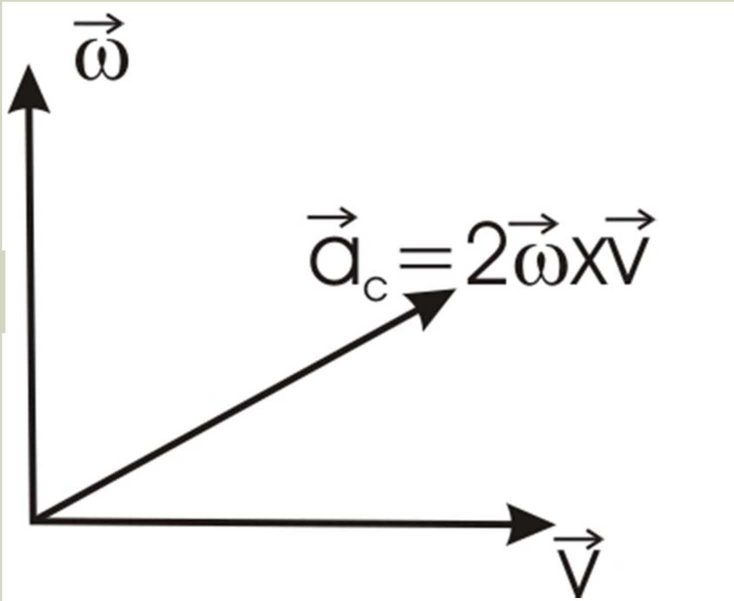
$$\vec{a}=\underbrace{\vec{a}_0+\vec{a}_{do}}+\vec{\varepsilon}\times\vec{r}_1+\underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}+\vec{a}'$$

przyśpieszenie unoszenia

przyśpieszenie Coriolisa

$$\boxed{\vec{a}_u=\vec{a}_0-\omega^2\vec{r}_1}$$

$$\boxed{2\vec{\omega}\times\vec{v}'=\vec{a}_c}$$



Siła bezwładności w wirującym układzie odniesienia

W układzie poruszającym się jedynie ruchem obrotowym ze stałą prędkością kątową wzór na przyśpieszenie

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_1}_{\vec{a}_u} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_1 + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\vec{a}_C} + \vec{a}'$$

skraca się do postaci

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}_1 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'$$

Stąd przyśpieszenie punktu materialnego P w układzie ruchomym

$$\vec{a}' = \vec{a} + \omega^2 \vec{r}_1 - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

mnożąc przez masę otrzymamy

$$m\vec{a}' = m\vec{a} + m\omega^2 \vec{r}_1 - m2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

co można zapisać jako

$$\boxed{\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{od} + \vec{F}_C}$$

$\boxed{\vec{F}' = m\vec{a}'}$ jest to siła działająca na punkt P w układzie wirującym

$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$ jest siłą działającą w układzie stałym

$\boxed{\vec{F}_{od} = m\omega^2 \vec{r}_1'}$ jest siłą bezwładności zwaną siłą odśrodkową

$\boxed{\vec{F}_C = -m2\vec{\omega} \times \vec{v}'}$ jest siłą bezwładności zwaną siłą Coriolisa

Singapore, Singapore, Febuary 2014