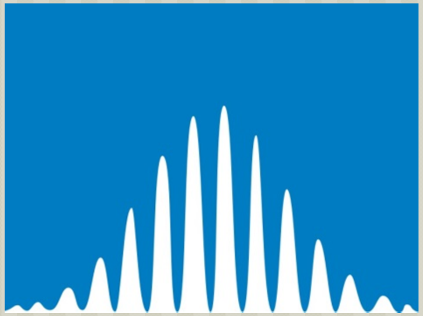
Anchorage, USA, May 2002

Ruch drgający

- Podstawowe definicje
- Swobodne drgania harmoniczne
- Drgania tłumione
- Drgania wymuszone
- Składanie drgań



Podstawowe definicje

- **drgania** – procesy, w których dana wielkość fizyczna na przemian rośnie i maleje
- drgania **swobodne** – gdy układ, na który nie działają zmienne siły zewnętrzne, zostanie wyprowadzony z położenia równowagi
- **okresowy** ruch drgający (periodyczny) – jeżeli wartości wielkości fizycznych zmieniające się podczas drgań, powtarzają się w pewnych odstępach czasu
- drgania **harmoniczne** – drgania opisane funkcją harmoniczną ($\sin\omega t$ lub $\cos\omega t$)
- **oscylator harmoniczny** – układ wykonujący drgania harmoniczne np. wahadło, obwód LC

Swobodny oscylator harmoniczny

wychylenie z położenia równowagi

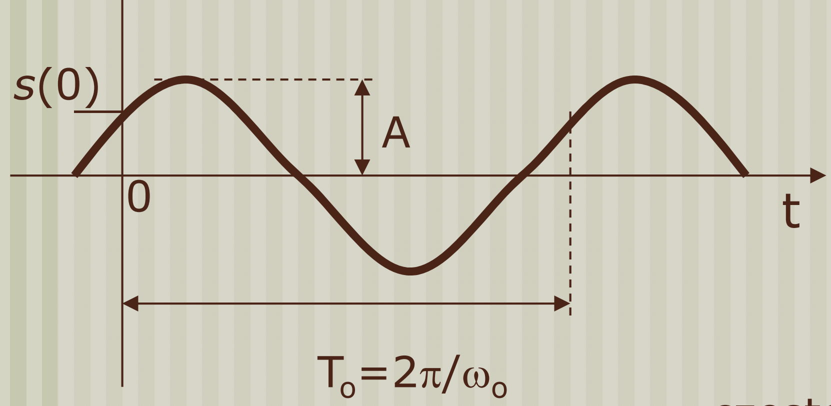
częstość kątowa

faza początkowa

$$s(t) = A\sin(\underbrace{\omega_o t + \varphi}_{\text{faza drgań}})$$

amplituda - maksymalne wychylenie

$$s(0) = A\sin(\varphi)$$



definicja okresu drgań

$$\omega_o(t + T_o) + \varphi = (\omega_o t + \varphi) + 2\pi$$

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$$ - czas 1 drgania

$$n = \frac{t}{T_o}$$ - liczba drgań w czasie t

$$\nu = \frac{n}{t} = \frac{t}{T_o t} = \frac{1}{T_o} \qquad (1\text{Hz})$$

częstotliwość (częstość) drgań – liczba drgań w jednostce czasu

częstotliwość kołowa - $\omega_o = 2\pi\,\nu$

Równanie różniczkowe drgań harmonicznych

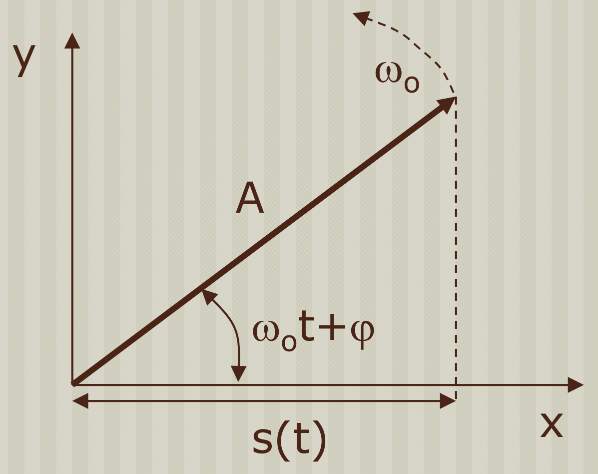
$$s(t) = A\sin(\omega_o t + \varphi)$$

$$\frac{ds}{dt} = A\omega_o \cos(\omega_o t + \varphi) = A\omega_o \sin\left(\omega_o t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$ różnica faz $\pi/2$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_o^2 \sin(\omega_o t + \varphi) = A\omega_o^2 \sin(\omega_o t + \varphi + \pi)$$ różnica faz π

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_o^2 s = 0}$$ - równanie drgań

Metoda wykresów fazowych



Opis przy pomocy liczb zespolonych

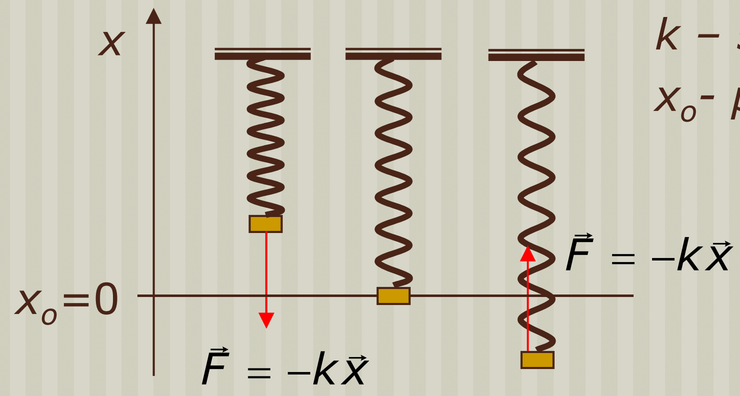
$$z = Ae^{i(\omega_o t + \varphi)}$$

$$z = A[\cos(\omega_o t + \varphi) - i\sin(\omega_o t + \varphi)]$$

$$s = \mathrm{Re}\, z = A\cos(\omega_o t + \varphi)$$

Przykład 1: Mechaniczne drgania harmoniczne

Wahadło sprężynowe



k – stała sprężystości

x_o- położenie równowagi

$$F = -k(x - x_o)$$

$$F = -k\,x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \iff \frac{d^2s}{dt^2} + \omega_o^2 s = 0 \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x = A\cos(\omega_o t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_o^2 \cos(\omega_o t + \varphi)$$

stałe A, φ wyznaczamy z warunków początkowych np. $x(t=0) = 0$

$$v(t=0) = v_o$$

Energia oscylatora harmonicznego

Energia kinetyczna

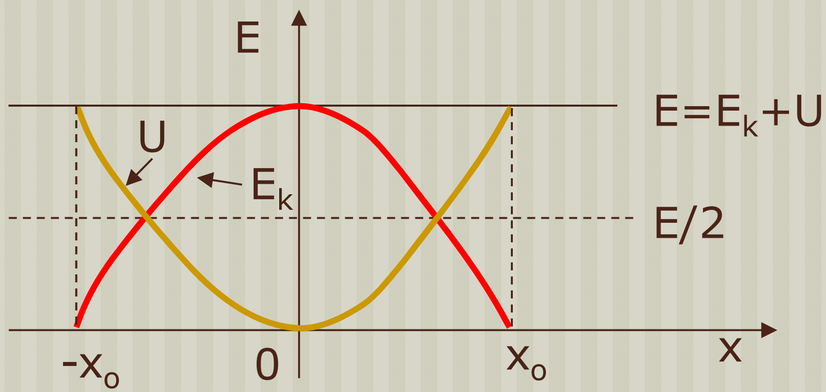
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi)$$

Energia potencjalna

$$U = -\int_0^x F\,dx = \int_0^x kx\,dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi)$$

Energia całkowita

$$E = E_k + U = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_o^2}{2} A^2$$



Drgania tłumione

siły oporu

$$F_t = -r v$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks - r\frac{ds}{dt} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{ds}{dt} + \frac{k}{m}s = 0$$

Równanie drgań tłumionych: $\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta\frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = 0}$

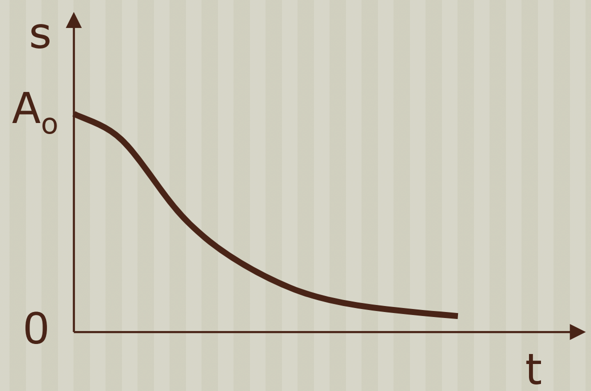
$$s = e^{-\beta t}u(t)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\omega_o^2 - \beta^2\right)u = 0$$

Dla silnego tłumienia $\left(\beta^2 \geq \omega_o^2\right)$

$$u = A_o e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}} \qquad s = A_o e^{-\left(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_o^2}\right)t}$$

ruch aperiodyczny



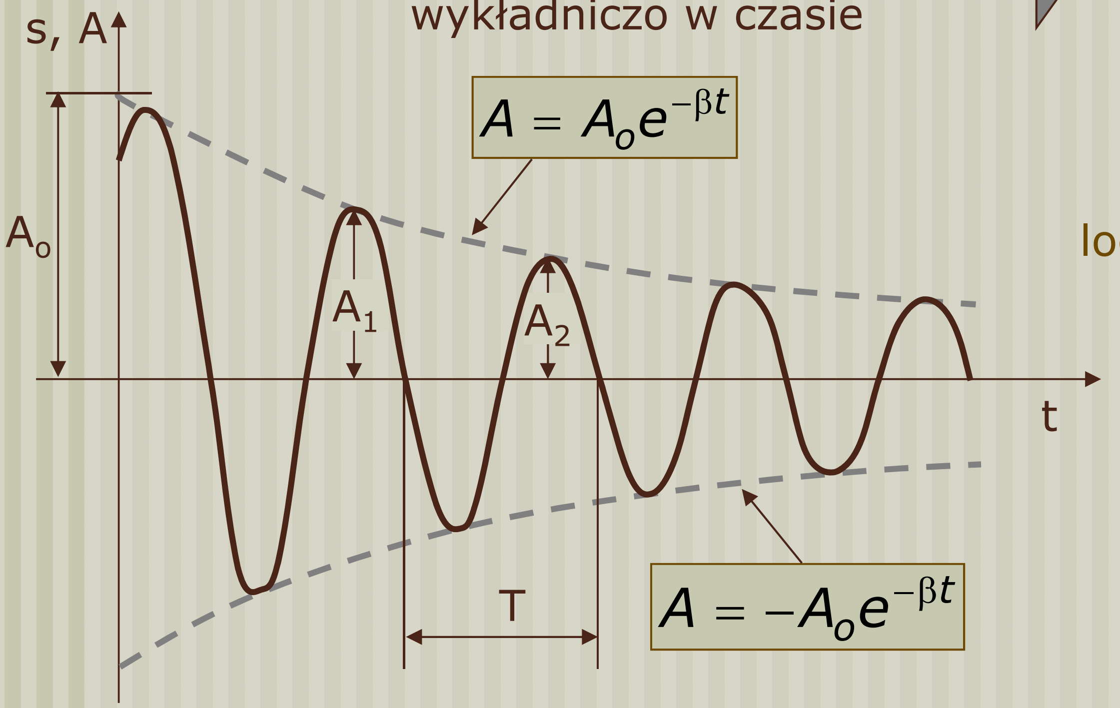
Dla słabego tłumienia $\left(\beta^2 < \omega_o^2\right)$

oznaczamy: $\omega^2 = \left(\omega_o^2 - \beta^2\right)$

$$u = A_o\cos(\omega t + \varphi) \qquad \boxed{s = A_o e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Analiza drgań tłumionych

$$s = \underbrace{A_o e^{-\beta t}}_{\text{amplituda malejąca wykładniczo w czasie}} \cos(\omega t + \varphi)$$



częstość drgań tłumionych

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \beta^2} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} > T_o$$

logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{A_o e^{-\beta t}}{A_o e^{-\beta(t+T)}} =$$

$$= \ln e^{\beta T} = \beta \cdot T$$

Drgania wymuszone

- aby utrzymać drgania niettłumione należy skompensować straty energii
- siła wymuszająca (lub siła elektromotoryczna)

$$F = F_o \cos \omega t \qquad V = V_o \cos \omega t$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_o \cos \omega t$$

równanie ruchu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = \frac{F_o}{m} \cos \omega t$$

$$\boxed{\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\beta \frac{ds}{dt} + \omega_o^2 s = x_o \cos \omega t}$$

równanie drgań wymuszonych

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\beta \frac{dz}{dt} + \omega_o^2 z = x_o e^{i\omega t}$$

równanie drgań wymuszonych w postaci zespolonej

Rozwiązanie równania drgań wymuszonych

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\beta\frac{dz}{dt} + \omega_o^2 z = x_o e^{i\omega t}$$

Rozwiązania tego równania szuka się w postaci: $z = z_o e^{i\Omega t}$

$$-\Omega^2 z_o e^{i\Omega t} + 2\beta i\Omega\, z_o e^{i\Omega t} + \omega_o^2 z_o e^{i\Omega t} = x_o e^{i\omega t}$$

równania musi być spełnione dla każdej chwili czasu więc $\Omega = \omega$

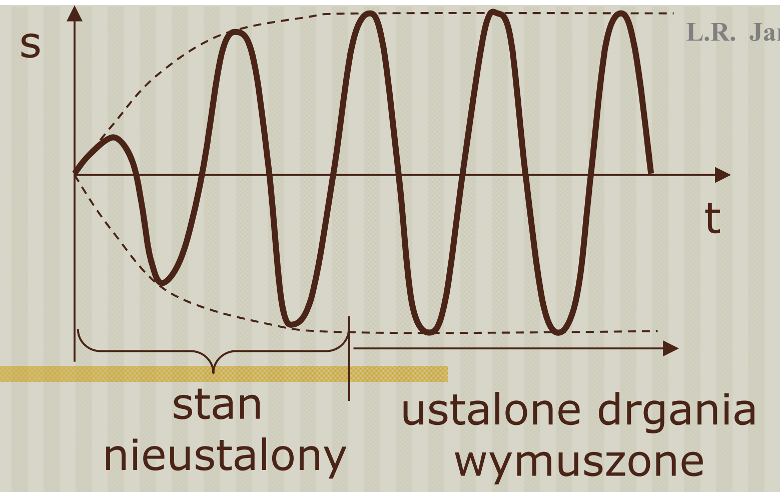
$$z_o = \frac{x_o}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right) + 2i\beta\omega} = \frac{x_o\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2} + \frac{-2\beta\omega x_o}{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}i$$

$$z_o = |z_o|\cdot e^{i\varphi} = |z_o|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = a + b\cdot i$$

$$A = |z_o| = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{x_o}{\sqrt{\left(\omega_o^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad tg\varphi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

$$z = |z_o|\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{i\omega t} = |z_o|\cdot e^{i(\omega t + \varphi)} \qquad s = \mathrm{Re}\, z = |z_o|\cdot\cos(\omega t + \varphi)$$

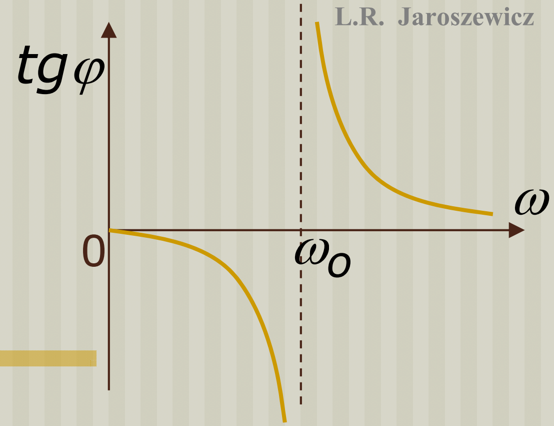
Wnioski



- po początkowym, nieustalonym stadium procesu następują ustalone drgania wymuszone,
- drgania wymuszone odbywają się z częstością siły wymuszającej,
- amplituda tych drgań zależy od amplitudy siły wymuszającej, jej częstości i parametrów układu drgającego,
- faza drgań zależy od częstości siły wymuszającej

 L.R. Jaroszewicz

Właściwości ustalonych drgań wymuszonych



a) Siła wymuszająca o małej częstości $\omega<<\omega_o$

$$tg\varphi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_o^2-\omega^2} \to 0 \Rightarrow \varphi \to 0 \qquad A = \frac{x_o}{\sqrt{\left(\omega_o^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2}} \approx \frac{x_o}{\omega_o^2}$$

zgodność fazy siły z wychyleniem

b) Rezonans $\omega \approx \omega_o$

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_o^2-2\beta^2} \approx \omega_o$$

częstość rezonansowa

$$A_r = \frac{x_o}{2\beta\sqrt{\omega_o^2-\beta^2}} \approx \frac{x_o}{2\beta\omega_o} \qquad tg\varphi = \frac{-\omega}{\beta} \to -\infty \quad \Rightarrow \varphi \to -\frac{\pi}{2}$$

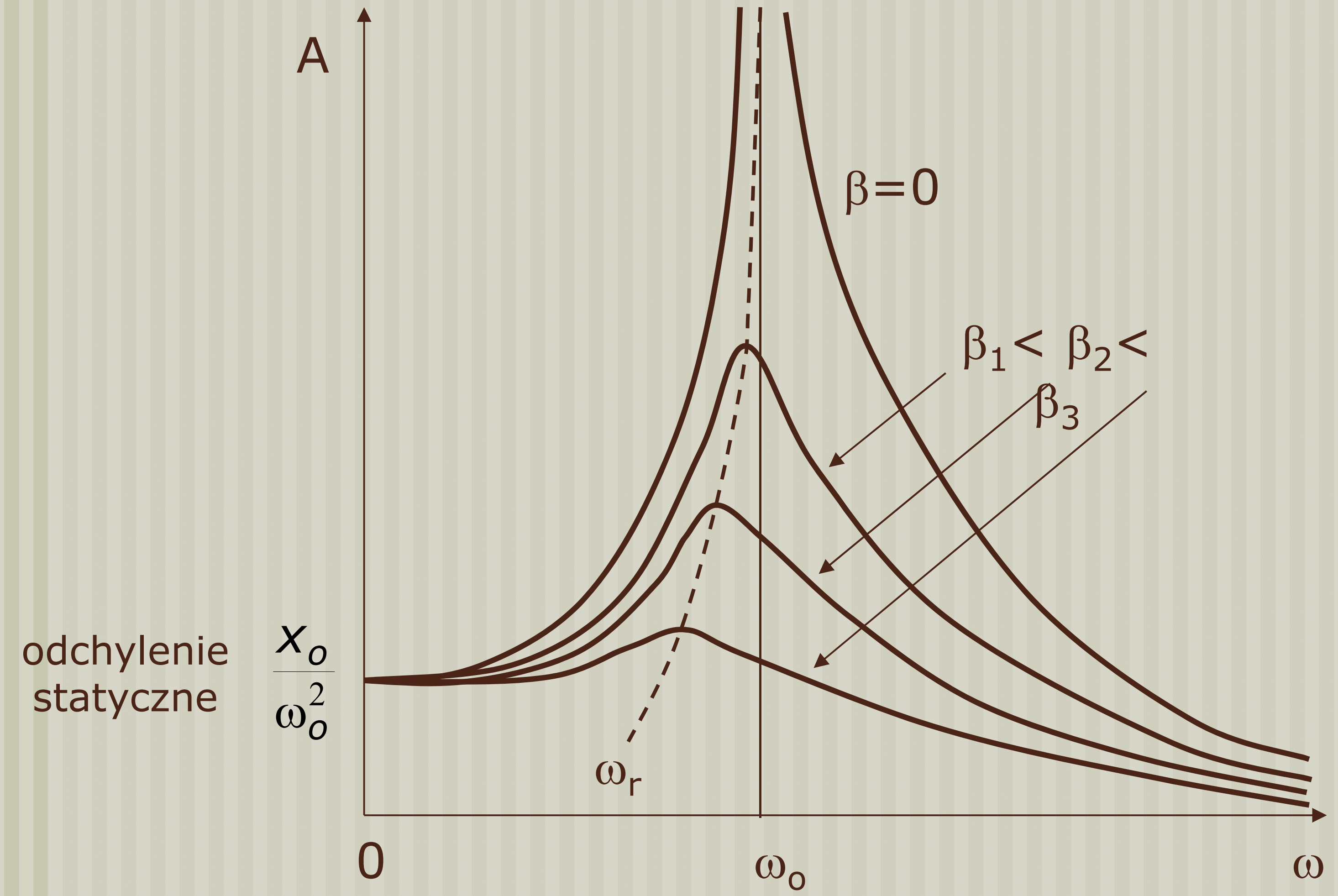
wychylenie opóźnia się w fazie o $\pi/2$

c) Siła wymuszająca o dużej częstości $\omega>>\omega_o$

$$A = \frac{x_o}{\omega^2} \qquad tg\varphi = \frac{2\beta}{\omega} \to 0 \Rightarrow \varphi \to -\pi$$

wychylenie opóźnia się w fazie o π

Amplituda drgań wymuszonych w funkcji częstości siły wymuszającej



L.R. Jaroszewicz

Składanie drgań o jednakowych często-ściach - metoda wykresów fazowych

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_o t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_o t + \varphi_2)$$

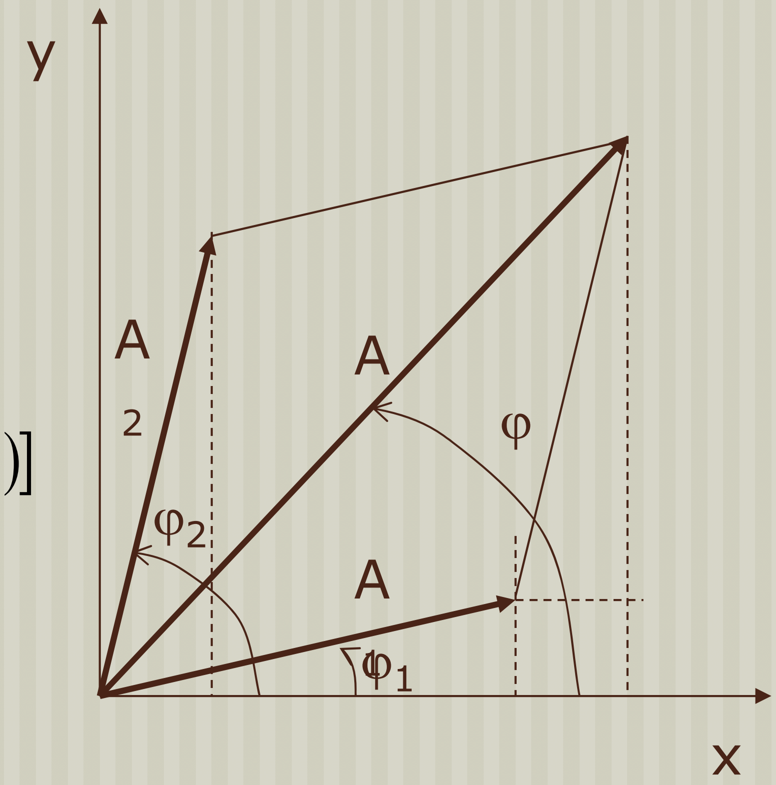
$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_o t + \varphi)$$

z prawa cosinusów

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$



Dudnienia

dwa drgania równoległe nieznacznie różniące się częstościami (φ=0)

$$x_1 = A\cos\omega t$$

$$x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t$$

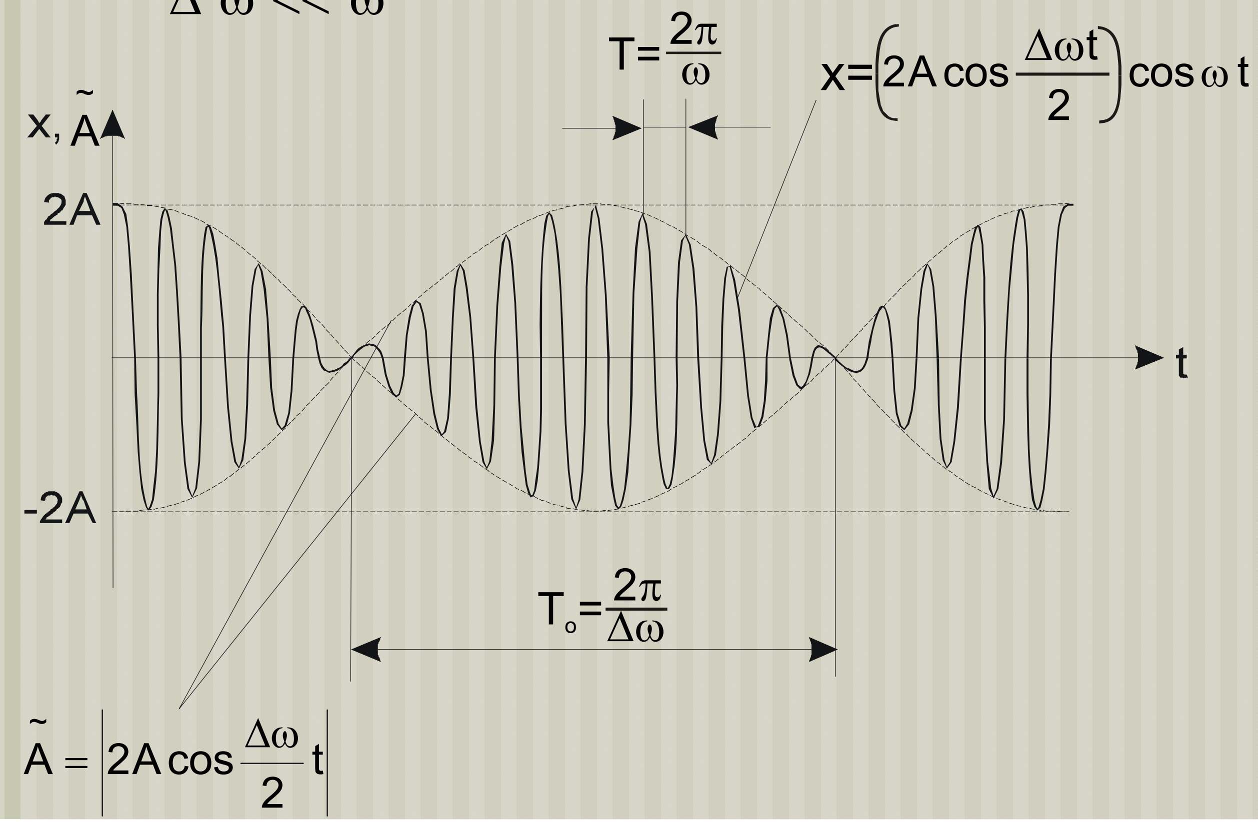
$$\Delta\omega \ll \omega$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega t$$

$$\tilde{A} = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$$

$$T_o = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$



Składanie drgań wzajemnie prostopadłych

$$x = A\cos\omega t$$
$$y = B\cos(\omega t + \varphi)$$

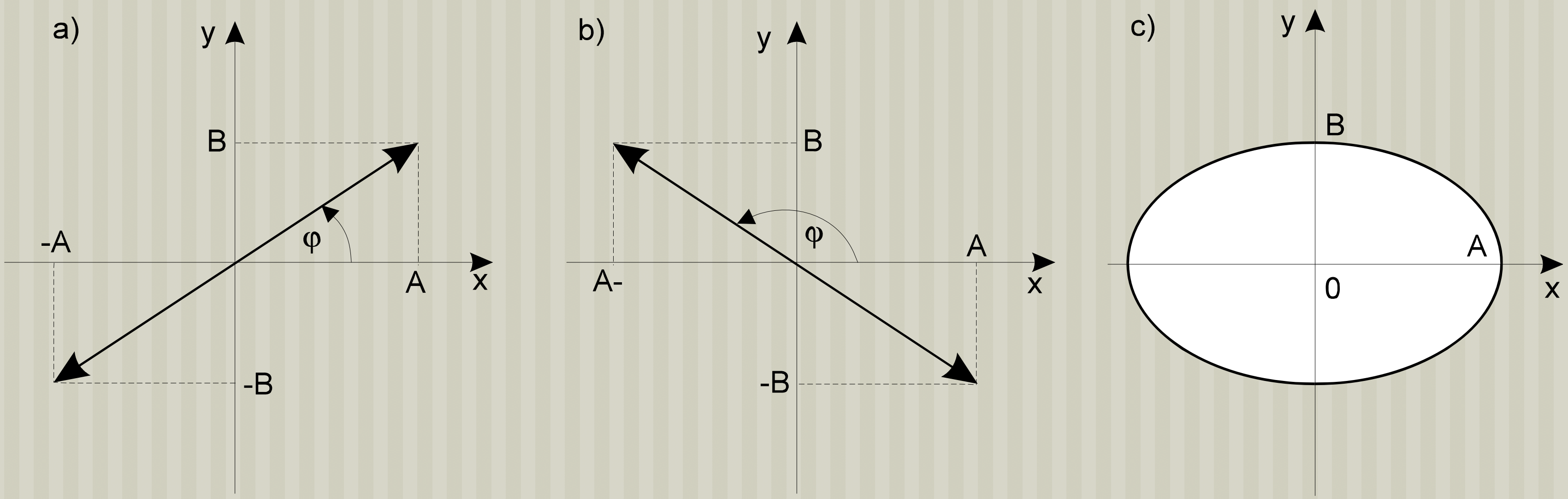
$$\frac{x}{A} = \cos\omega t \;\; ; \;\; \frac{y}{B} = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi$$

$$\sin\omega t = \sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\varphi$$

Dla $\varphi = m\pi$:

$m = 0, \pm 2, \pm 4$; $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5,$

Dla $\varphi = (2m+1)\pi/2$:



Kształt krzywych Lissajous zależy od stosunku amplitud, częstości i początkowych faz drgań.

Anchorage, USA, May 2002