Jucatan, Mexico, February 2005

Ruch falowy, ośrodek sprężysty

- Pojęcie ruchu falowego – rodzaje fal
- Równanie fali płaskiej – parametry fali
- Równanie falowe – prędkość propagacji, energia i pęd przenoszone przez falę
- Składanie fal – fale stojące

Pojęcie ruchu falowego

Ośrodek sprężysty cechuje możliwość wzajemnego oddziaływania na siebie cząstek wchodzących w jego skład i przekazywania w ten sposób energii. Jeżeli w pewnemu obszarowi ośrodka sprężystego dostarczymy energii nadając jego cząstkom ruch np. drgający to dzięki sprężystym własnościom ośrodka energia ta będzie transportowana z prędkością zależną od tych własności.

Ruchy związany z transportem energii przez ośrodek sprężysty, bez transportu masy, nazywamy ruchami falowymi lub po prostu falami.

Ruchy oscylacyjne albo inaczej drgania, omówione w trakcie poprzedniego wykładu, są również związane z ruchem falowym w ośrodkach sprężystych.

Rodzaje fal

Kierunek rozchodzenia się zaburzenia ośrodka, w ruchu falowym, nazywamy **promieniem fali.**

Zbiór punktów, w których zaburzenie ma tę samą fazę drgania w danej chwili czasu stanowi **powierzchnię falową.**

Powierzchnię falową najdalej odsunięta od źródła nazywamy **czołem fali.**

•Ze względu na fizykę oddziaływania:

#fale sprężyste # fale elektromagnetyczne.

- Ze względu na kierunek drgań cząstek w odniesieniu do kierunku rozchodzenia się fali:

poprzeczne # podłużne.

•Ze względu na kształt powierzchni falowej:

płaskie # kuliste # walcowe.

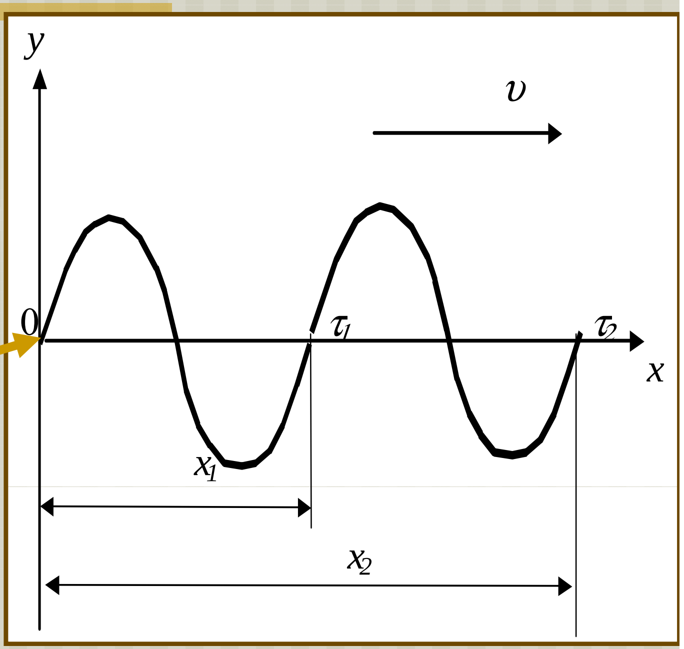
•Ze względu na obszar zaburzenia:

powierzchniowe # objętościowe

Równanie fali płaskiej

$$y_1 = y_m \sin[\omega(t-\tau_1)] = y_m \sin\left[\omega\left(t-\frac{x_1}{\upsilon}\right)\right] = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\upsilon T}\right)\right]$$

$$y_2 = y_m \sin[\omega(t-\tau_2)] = y_m \sin\left[\omega\left(t-\frac{x_2}{\upsilon}\right)\right] = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\upsilon T}\right)\right]$$



$$y(x=0|_{\varphi=0}) = y_m \sin\omega t$$

Wychylenia y_1 i y_2 będą równe gdy argumenty funkcji sinus będą różnić się o $2\pi n$ dla n=0,1,2,...

Dla n=1 x_2-x_1=λ => długość fali

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_2}{\upsilon T}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x_1}{\upsilon T}\right) = 2\pi$$

$$x_2 - x_1 = \lambda = \upsilon T$$

$$y = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - x)\right]$$

Wychylenie w dowolnym punkcie oddalonym o x od punktu 0 wynosi

$$y = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{\upsilon t}{\upsilon T} - \frac{x}{\upsilon T}\right)\right] = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\upsilon t - x)\right] = y_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

Oznaczając $2\pi/\lambda = k$

$$y = y_m \sin(\omega t - kx)$$

$$y = y_m \sin(\omega t + kx)$$

Równanie fali:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_m \cos\left[\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right] \equiv \mathrm{Re}\left\{\Psi_m \exp\left[j\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]\right\}$$

Parametry fali

amplituda, częstość (częstotliwość), faza, długość fali (wektor falowy), prędkość:

$$(\omega t - kx) = const$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \upsilon_f$$

Równanie falowe

$$y = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -y_m\left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)^2 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right] \qquad (1)$$

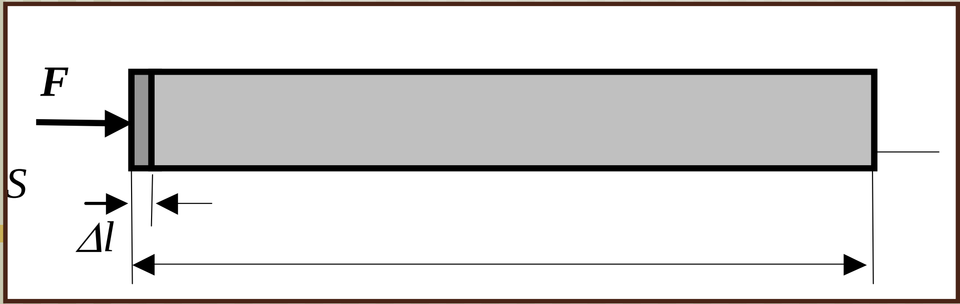
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -y_m\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)\right] \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \upsilon^2\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \Delta \Psi$$

Prędkość propagacji fali



$$F\Delta t = m\Delta v$$

$$\sigma = \varepsilon E \rightarrow F = \sigma S = \varepsilon E S = \frac{\Delta l}{l} E S$$

W czasie Δt zaburzenie dotrze w ruchu falowym na odległość l od czoła pręta

Prędkość rozchodzenia się zaburzenia → $$v = \frac{l}{\Delta t}$$

masa objęta zaburzeniem $$m = \rho l S$$

W wyniku naprężenia σ prędkość cząstek wzrośnie od zero do $$\Delta v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta l}{l} E S \Delta t = \rho l S \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

$$E/v = \rho v$$

$$v^2 = E/\rho$$

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Jeżeli działanie siły wywołuje, nie zmiany długości pręta, lecz odkształcenie objętościowe lub postaciowe to

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \qquad v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

W ośrodkach gazowych, w stałej temperaturze, moduł sprężystości objętościowej jest równy ciśnieniu $K=p$. Jeśli brak jest wymiany ciepła z otoczeniem (przemiany adiabatyczne) wówczas $K=\kappa p$ gdzie $\kappa=C_P/C_V$. W powietrzu $\kappa=1.4$, $\rho=1.293$ kg/m^3 przy ciśnieniu $p=1013$ hPa v=331.5 m/s.

Energia i pęd przenoszone przez falę

Gęstość energii zgromadzonej w jednostce objętości ośrodka sprężystego przenoszącego fale

$$y = y_m \sin(\omega t - kx)$$

$$e_{spr} = \frac{1}{2}\rho V_{\max}^2$$

$$V = \frac{dy}{dt} = y_m \omega \cos(\omega t - kx) = V_{max} \cos(\omega t - kx) \rightarrow V_{max} = y_m \omega$$

$$e_{spr} = \frac{1}{2}\rho y_m^2 \omega^2$$

Natężenie fali jest strumieniem energii przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do promienia fali

$$I = e_{spr}\mathrm{v} = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v} V_{\max}^2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v} y_m^2 \omega^2$$

$$V = \omega y_{max} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$e_{spr} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\mathrm{v}}{\omega}\right)^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2$$

pęd przenoszony przez falę

$$dp = \rho \mathrm{v} d\mathrm{v} \rightarrow p = \rho \int \mathrm{v} d\mathrm{v} = \frac{1}{2}\rho \mathrm{v}^2$$

$$y_i = y_m \sin(\omega t - kx), \quad i = 1,2$$

Składanie fal – fale stojące

$$y_w = y_1 + y_2 = 2y_m \cos\frac{[(\omega t + kx) - (\omega t - kx)]}{2} \sin\frac{[(\omega t + kx) + (\omega t - kx)]}{2}$$

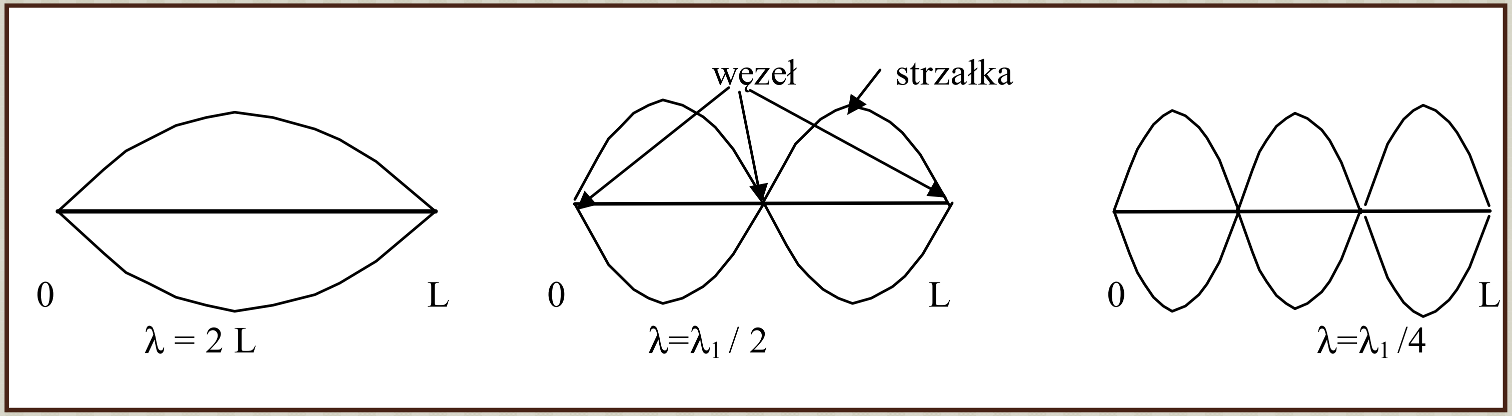
$$2y_m \cos kx \sin\omega t = B \sin\omega t$$

$$B = 2y_m \cos kx = 2y_m \cos\frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$Gdy \quad \cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \quad B = 0$$

$$Gdy \quad \cos\frac{2\pi x}{\lambda} = 1 \quad B = B_{max}$$

Cały sprężysty ośrodek liniowy x podzieli się na przedziały o długości $\lambda/2$. Wszystkie punkty każdej takiej części będą drgać w zgodnych fazach, natomiast fazy części sąsiednich będą różnić się o π



Jucatan, Mexico, February 2005